

1. 이차방정식 $2[x]^2 + 3[x] + 1 = 0$ 의 해를 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \leq x < 0$

② $-1 \leq x < 1$

③ $-1 \leq x < 2$

④ $0 \leq x < 1$

⑤ $0 \leq x < 2$

해설

$$2[x]^2 + 3[x] + 1 = ([x] + 1)(2[x] + 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$[x] = -1 \text{ 또는 } [x] = -\frac{1}{2}$$

그런데 $[x]$ 은 정수이므로 $[x] = -1$

$$\therefore -1 \leq x < 0$$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$ 의 한 근이 $2 + ai$ 일 때 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9

② -5

③ 3

④ 6

⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$ 이므로 다른 한 근은 $2 - ai$ 이다.

$\therefore$ 두 근의 합 $-a = 4 \quad \therefore a = -4$

두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$

$\therefore b = 10$

$\therefore a + b = 10 - 4 = 6$

3. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가질 때 $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$ 의 근을 판별하면?

① 중근

② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근

④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D' = 4 + a - b = 0$$

$$\therefore b = a + 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a + 16 = 0$$

$$D' = (a - 1)^2 - (a^2 - 2a + 16) = -15 < 0$$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

4. a 가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$ 에 대하여 x 에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 실근을 가진다.
- ② $f(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $g(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
- ③ $f(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $g(x) = 0$ 도 허근을 가진다.
- ④ $g(x) = 0$ 이 실근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 허근을 가진다.
- ⑤ $g(x) = 0$ 이 허근을 가지면 $f(x) = 0$ 은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$ 과 $g(x) = 0$ 의 판별식을 각각 D_1, D_2 라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1,$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$$

모든 실수 a 에 대하여

$$2a + 1 > 2a - 1,$$

즉, $D_1 > D_2$ 이므로 $D_1 < 0$ 이면 $D_2 < 0$

5. x 의 이차방정식 $x^2 - (2a + 2 + m)x + a^2 + 4a - n = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m, n 을 정할 때, $m + n$ 의 값은?

① -3

② -2

③ 1

④ 3

⑤ 4

해설

$$D = (2a + 2 + m)^2 - 4(a^2 + 4a - n) = 0$$

이 등식을 a 에 관하여 정리하면

$$4a(m - 2) + m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

이 등식이 a 에 관계없이 항상 성립하려면

$$4(m - 2) = 0, \quad m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

$$\therefore m = 2, \quad n = -4 \quad \therefore m + n = -2$$

6. $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)일 때, $\alpha^t = b + ai$ 라 한다.

$\alpha = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$ 을 간단히 하면?

① $1 + i$

② $1 - i$

③ $2 + i$

④ $2 - i$

⑤ $\sqrt{3} + i$

해설

$\alpha = a + bi$, $\alpha^t = b + ai$ 이므로

$$\alpha\alpha^t = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$$

그런데 $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = a + bi$ 에서

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha\alpha^t = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)i = i$$

$$\therefore (\text{준식}) = 2\alpha(\alpha \cdot \alpha^t)^4 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{2} \cdot i^4 = \sqrt{3} + i$$

7. n 이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2

② $-\sqrt{2}$

③ 0

④ 2

⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} \\ &= \left\{ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left\{ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (\pi^2)^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \{(-\pi)^2\}^{2n} - \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

8. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

- ㉠ $\alpha + \bar{\alpha}$ 는 실수이다.
 ㉡ $\alpha - \bar{\alpha}$ 는 허수이다.
 ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
 ㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉣

⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \bar{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \bar{\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha - \bar{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

$$\begin{aligned} \text{㉣ } \overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \bar{\alpha} + \bar{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha\beta} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} \end{aligned}$$

$\therefore$ 참

9. $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{10} + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^8$ 값을 구하면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ 1

④ 0

⑤ -1

해설

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad 2\omega + 1 = \sqrt{3}i$$

$$\text{양변을 제곱해서 정리하면 } \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \Rightarrow \omega^3 = 1$$

$$(\omega^3)^3 \cdot \omega + (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$$

10. 방정식 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $f(x) = ax^2 + bx + 12 (a \neq 0)$ 에 대하여 $f(\omega) = 3\omega$ 를 만족한다. 이 때, 실수 a, b 의 합은?

① 12

② -12

③ 15

④ -15

⑤ 18

해설

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^2 + \omega + 2 = 0 \quad \therefore \omega^2 = -\omega - 2$$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= a\omega^2 + b\omega + 12 = a(-\omega - 2) + b\omega + 12 \\ &= (b - a)\omega + (12 - 2a) \end{aligned}$$

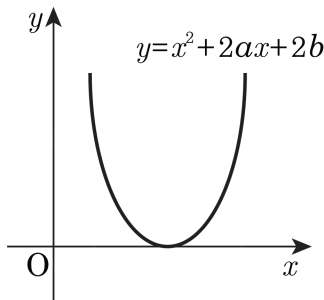
$f(\omega) = 3\omega$ 이므로

$$(b - a)\omega + (12 - 2a) = 3\omega$$

$$b - a = 3, \quad 12 - 2a = 0 \quad (\because \omega \text{는 허수})$$

$$\therefore a = 6, \quad b = 9$$

11. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.
- ② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.
- ⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

$$\text{판별식 } \frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$$

$$= 2b - b^2 - 2$$

$$= -(b^2 - 2b + 2)$$

$$= -(b-1)^2 - 1 < 0$$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

12. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{8}{49}$

② $\frac{49}{8}$

③ 49

④ 8

⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 를 x 에 대해 정리하면

$$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$$

$$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$$

$$4 - 200 + 32a = 0$$

$$\therefore a = \frac{49}{8}$$

13. 방정식 $3x^2 + 5x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 방정식 $5x^2 + 4x + 3 = 0$ 의 두 근을 γ, δ 라 할 때, $\frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\delta\beta} + \frac{1}{\delta\alpha}$ 의 값은?

① $-\frac{10}{3}$

② $-\frac{7}{3}$

③ $-\frac{4}{3}$

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ 1

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{3}, \alpha\beta = -\frac{2}{3}, \gamma + \delta = -\frac{4}{5}, \gamma\delta = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\delta\beta} + \frac{1}{\delta\alpha} \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\delta} \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \right) \left(\frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} \right) \\ &= \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}} \times \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

14. x 의 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q - 2 = 0$ 의 두 실근의 비가 $1 : 2$ 가 되도록 하는 실수 p, q 에 대하여 q 의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$

② $q > \frac{1}{2}$

③ $q \geq \frac{1}{2}$

④ $q > -\frac{1}{2}$

⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = 3p \quad \therefore \alpha = p$$

$$\alpha \cdot 2\alpha = 4q - 2 \quad \therefore \alpha^2 = 2q - 1$$

$$\text{따라서 } p^2 = 2q - 1$$

$$\text{한편 } D > 0 \text{에서 } 9p^2 - 4(4q - 2) > 0$$

$$9(2q - 1) - 16q + 8 > 0$$

$$2q - 1 > 0$$

$$\therefore q > \frac{1}{2}$$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = 16$ 이다. 실수 k 의 값은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 6k < 0, \quad k(k-6) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 6$$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -2k, \quad \omega\bar{\omega} = 6k \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 + \bar{\omega}^2 &= (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega\bar{\omega} = (-2k)^2 - 12k \\ &= 4k^2 - 12k \end{aligned}$$

$$4k^2 - 12k = 16,$$

$$\text{즉, } k^2 - 3k - 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(k+1)(k-4) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

$$0 < k < 6 \text{ 이므로 } k = 4$$