1. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$　② $2x$　③ $3x+2$
④ $4x$　⑤ $4x+1$

해설

x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면
$Q(x)=x-1,\quad R(x)=3x+1$
$\therefore\ Q(x)+R(x)=4x$

2. $(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 512

해설

$(4x^2 - 3x + 1)^5(x^3 - 2x^2 - 1)^4 = ax^{22} + bx^{21} + \cdots + c$
위의 식에 $x = 1$ 을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.
$\therefore$ (계수의 총합) $= 2^5 \times (-2)^4 = 512$

3. 다항식 $P(x) = x^4 + 2x^3 + kx^2 - 2x + 8$가 $x - 1$로 나누어 떨어지도록 상수 k의 값을 정할 때 다음 중 $P(x)$의 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x - 2$ ④ $x + 2$ ⑤ $x + 4$

해설

$P(x) = (x-1)Q(x)$

$\therefore\ P(1) = 1 + 2 + k - 2 + 8 = 0$

$\therefore\ k = -9$

$$\begin{aligned}\therefore\ P(x) &= x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 \\ &= (x-1)(x-2)(x+1)(x+4)\end{aligned}$$

4. $\dfrac{2002^3-1}{2002\times2003+1}$ 의 값을 구하면?

① 1999 ② 2000 ③ 2001 ④ 2002 ⑤ 2003

해설

$a=2002$로 치환하면

$\dfrac{a^3-1}{a(a+1)+1}=\dfrac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}=a-1$

$\therefore\ 2002-1=2001$

5. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2, $(x-1)(3x^2+ax+2a)$의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-3$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$

$\therefore 3x^2+ax+2a$는

$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.

$f(x)=3x^2+ax+2a$로 놓을 때

$x+2$가 인수이면 $f(-2)=12-2a+2a=12$가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.

$x+1$이 인수이면 $f(-1)=3-a+2a=3+a=0$

$\therefore a=-3$

6. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식의 최대공약수가 $x-3$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-3x일 때, 두 이차다항식의 합을 구하면?

① $2x^2-5x$ ② $2x^2-x-3$ ③ $2x^2+x+3$
④ $2x^2-5x-3$ ⑤ $2x^2+5x+3$

해설

두 식 A, B의 최대공약수가 $x-3$ 이고 최소공배수가 $x(x-3)(x+1)$ 이다.
따라서 이차항의 계수가 1인 두 다항식은
각각 $x(x-3)$, $(x-3)(x+1)$ 이다.
$\therefore$ 두 다항식의 합 $=2x^2-5x-3$

7. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.
$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$
$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠
$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$
$\therefore\ x + y = 3$ ($\because\ x$, y 는 양의 실수)

8. $x = 2007,\ y = 4331$ 일 때, $\dfrac{x+yi}{y-xi} + \dfrac{y-xi}{x+yi}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$
$$= \frac{(x+yi)^2 + (y-xi)^2}{(y-xi)(x+yi)}$$
$$= \frac{x^2 + 2xyi - y^2 + y^2 - 2xyi - x^2}{(y-xi)(x+yi)}$$
$$= 0$$

해설

$$\frac{x+yi}{y-xi} + \frac{y-xi}{x+yi}$$
$$= \frac{i(y-xi)}{y-xi} + \frac{-i(x+yi)}{x+yi}$$
$$= i + (-i)$$
$$= 0$$

9. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

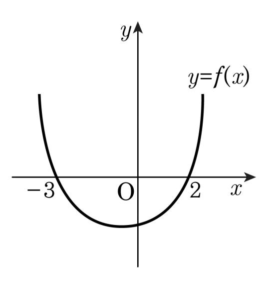
$=(\sqrt{-3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{-2})-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}-\sqrt{-2}-\sqrt{-2}$

$=-\sqrt{36}-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=-6-2\sqrt{2}i$

$\therefore\ ab=12\sqrt{2}$

10. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 5개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0,\ f(2) = 0$ 이므로
방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은
(i) $x^2 - 1 = -3$일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2 - 1 = 2$일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{3}$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

11. 세 실수 $a,\ b,\ c$가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서

$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(1-c)(1-a)(1-b)$

$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$

$=1-1+1-1=0$

12. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

13. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)+g(x)$를 x^2+x+1 으로 나누면 나머지가 9, $f(x)-g(x)$ 를 x^2+x+1 로 나누면 나머지가 -3 이다. 이 때, $f(x)$를 x^2+x+1로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x)+g(x)=(x^2+x+1)Q_1(x)+9 \cdots\cdots ㉠$

$f(x)-g(x)=(x^2+x+1)Q_2(x)-3 \cdots\cdots ㉡$

㉠ + ㉡을 하면

$2f(x)=(x^2+x+1)\left\{Q_1(x)+Q_2(x)\right\}+6$

$f(x)=(x^2+x+1)\dfrac{Q_1(x)+Q_2(x)}{2}+3$

$\therefore$ 나머지는 3

14. 1999개의 다항식 $x^2-2x-1,\ x^2-2x-2,\ \cdots,\ x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ ($a,\ b$ 는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$ 인 자연수)

$ab=n,\ a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$ 의 43개

15. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\
&= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18) + 21x^2 \\
&= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\} + 21x^2 \\
&= (x^2-18)^2 - 4x(x^2-18) - 21x^2 + 21x^2 \\
&= (x^2-18)(x^2-4x-18)
\end{aligned}
$$

따라서 $p=-18$, $g=-4$

$\therefore pg = (-18)\times(-4) = 72$

16. 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$의 값을 모두 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1-i$

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{1}{i}=-i$, $\left(\frac{1}{i}\right)^3=i$

i) $n=2k$일 때,

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots+i=1$

ii) $n=2k-1$일 때

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$

$=1-i+i-i+\cdots-i$

$=1-i$

17. 두 양의 실수 x, y 가 $2x^2+xy-2y^2=0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$　② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$　③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$

④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$　⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x>0$, $y>0$ 에서 $2x^2+xy-2y^2=0$의 양변을 y^2으로 나누면

$2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)-2=0$

$\frac{x}{y}=t$라 하면 $(t>0)$

$2t^2+t-2=0$

근의 공식에 대입하면

$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

$\therefore t=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $(t>0)$ $\frac{x}{y}=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

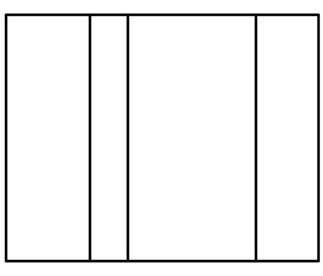
18. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \frac{1}{x - [x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개　　② 3개　　③ 4개
④ 5개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x - [x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(i) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
$\therefore$해가 없다.
(ii) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
$1 < x < 2$이므로 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
(iii) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(iv) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$
$3 < x < 4$이므로 $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$
(v) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x의 개수는 4개

19. 어떤 농부가 길이 700m 의 철망을 가지고 그림과 같은 모양의 가축우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 넓이를 최대로 하는 바깥 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것은 몇 m 인가?



① 60m ② 70m ③ 80m ④ 90m ⑤ 100m

해설

세로의 길이를 x 라 하면 세로가 5 개 있으므로 필요한 길이는 $5x$,

가로의 길이는 $\frac{1}{2}(700-5x)$ 이다. 전체 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(700-5x)\cdot x \\ &= -\frac{5}{2}x^2 + 350x \\ &= -\frac{5}{2}(x^2 - 140x + 70^2 - 70^2) \\ &= -\frac{5}{2}(x-70)^2 + 12250 \end{aligned}$$

따라서 넓이는 세로가 70m , 가로가 175m 일 때 최대이다.

20. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0$ $\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ ……㉠

$\{9-3b+a=0\}$……㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{9}{4},\ ab=-\frac{81}{16}$

21. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, x^2-4x+5, $(x-1)(x^2-4x+5)$ 로 나누면 나머지가 각각 4, $px+q$, $(x-r)^2$ 이 될 때, pqr 의 값은? (단, $r>0$)

① -24 ② -36 ③ 20 ④ 18 ⑤ 14

해설

$f(x)=(x^2-4x+5)Q(x)+px+q\cdots$①
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x-r)^2\cdots$②
$=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x^2-4x+5)+px+q\cdots$③
$f(1)=4$ 이므로 ②에서 $f(1)=(1-r)^2=4$
$r>0$ 이므로 $r=3$
②, ③을 비교해 보면
$(x-r)^2=(x^2-4x+5)+px+q$
$r=3$ 을 대입하면
$(x-3)^2=x^2+(p-4)x+(q+5)$
$\therefore\ p-4=-6,\ q+5=9$
$\therefore\ p=-2,\ q=4$
$\therefore\ pqr=-24$

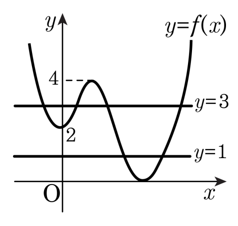
22. x에 관한 방정식 $x^4 + ax^2 + a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$(a, b는 실수)이 한 개의 중근(실근)과 두 허근을 갖도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 7

해설

$x^2 = t$라 놓으면 $t^2 + at + a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$
x가 한 개의 중근과 두 허근을 가지려면 t는 0과 음근 하나를 가져야 한다.
두 근의 합 : $-a < 0 \quad \therefore\ a > 0$
두 근의 곱 : $a^4 - 2a^2 + b^2 - 4b + 5 = 0$
$(a^2-1)^2 + (b-2)^2 = 0$
$a^2 = 1,\ b = 2$
$\therefore\ a = 1\ (\because\ a > 0),\ b = 2$
$\therefore\ a + b = 3$

23. 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 방정식
$\{f(x)\}^2 = 4f(x) - 3$ 의 실근의 개수는?



① 1 개　② 2 개　③ 3 개
④ 4 개　⑤ 6 개

해설

$\{f(x)\}^2 = 4f(x) - 3$ 을 인수분해하면
$\{f(x) - 1\}\{f(x) - 3\} = 0$
$\therefore f(x) = 1$ 또는 $f(x) = 3$
따라서, 위의 그래프와 같이
$f(x) = 1$ 과 $f(x) = 3$ 을 만족하는 x는
각각 2 개와 4 개이므로 실근의 개수는 6 개이다.

24. 성은이네 과수원에서는 생산하는 모든 사과를 수경이네 가게에 납품하고 있다. 수경이네 가게에서는 자금 사정이 어려워 올해 사과 한 개당 가격을 $x\%$ 인하하여 납품하면 1 년 후에는 올해 인하하여 납품받은 가격에서 $2x\%$ 를 인상한 가격으로 납품받겠다는 약속을 하였다. 1 년 후 사과 한 개당 가격을 가장 비싸게 받으려면 x 의 값을 얼마로 정해야 하는가?

① 22　② 25　③ 28　④ 30　⑤ 32

해설

원래 납품하던 사과 한 개의 가격을 a 원이라 하면 올해 $x\%$ 인하한 가격은 $a\left(1-\frac{x}{100}\right)$ 원이다.
이 가격에서 $2x\%$ 인상한 1 년 후의 사과 한 개의 가격을 $f(x)$ 원이라 하면

$$f(x)=a\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{2x}{100}\right)$$
$$=a\left(1+\frac{x}{100}-\frac{x^2}{5000}\right)$$
$$=-\frac{a}{5000}\left(x^2-50x-5000\right)$$
$$=-\frac{a}{5000}\left\{(x-25)^2-5625\right\}$$

이때, $0\le x\le 100$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=25$ 일 때 최대이고 최댓값은 $\frac{5625}{5000}a$ 이다.
따라서, 올해 사과 한 개당 가격을 25% 인하하여 납품하면 1 년 후에 가장 비싼 가격으로 납품할 수 있다.

25. 이차방정식 $x^2 - mx + m + 4 = 0$의 두 근이 모두 정수가 되는 m의 값은 두 개가 있다. 다음 중 이 두 수를 근으로 하는 이차방정식은?

① $x^2 + 4x + 32 = 0$　　② $x^2 + 4x - 32 = 0$

③ $x^2 - 4x + 32 = 0$　　④ $x^2 - 4x - 32 = 0$

⑤ $x^2 + 4x - 30 = 0$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β라고 하면근과 계수의 관계에서

$\alpha + \beta = m$ ······㉠

$\alpha\beta = m + 4$······㉡

㉡–㉠하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 5$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$

$\alpha - 1$	$\beta - 1$	α	β	$\alpha + \beta = m$
1	5	2	6	8
5	1	6	2	8
−1	−5	0	−4	−4
−5	−1	−4	0	−4

따라서 $m = 8,\ -4$이고 이 두 수를 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2 - 4x - 32 = 0$