1. $f(2) = -15$, $g(-2) = 5$ 인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$ 의 곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$, 최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$ 일 때, $f(-2)+g(2)$ 의 값은?

① 8 ② 18 ③ 28 ④ 38 ⑤ 48

해설

곱이 $(x+3)^2(x^2+2x-35)$ 이고,
최소공배수가 $(x+3)(x^2+3x-35)$ 이므로
두 이차식은 $(x+3)(x-5)$, $(x+3)(x+7)$
$f(2) = -15$ 이므로 $f(x) = (x+3)(x-5)$
$g(-2) = 5$ 이므로 $g(x) = (x+3)(x+7)$

$$\begin{aligned}\therefore f(-2)+g(2) &= (-2+3)(-2-5)+(2+3)(2+7)\\ &= (-7)+45 = 38\end{aligned}$$

2. 다음은 유클리드 호제법 ‘두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.’ 를 보이는 과정이다.

> A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,
> $A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소) 로 나타낼 수 있다.
> A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
> $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
> $\therefore\ R = G(a - bQ)$
> 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
> 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
> (가) m (일차이상의 다항식) 이 존재하여
> $b = mk$, $a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
> $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
> 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
> a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
> 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
> $B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서
> b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

(   ) 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수
② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수
④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
$A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소) 이고,
A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
$A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 m 이 존재하여
$b = mk$, $a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
$B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

3. 복소수 $\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$ 로 나타낸다. $\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4+3i$　　② $3+3i$　　③ $2+3i$

④ $1+3i$　　⑤ $-1+3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\} i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot a^*)^4\\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4\\ &= 4+3i\end{aligned}$$

4. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

> ㉠ $\alpha^2+\alpha+1=0$
>
> ㉡ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}=1$
>
> ㉢ $z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$ 일 때, $z\bar{z}=\dfrac{7}{3}$

① ㉠　② ㉠ , ㉡　③ ㉠ , ㉢
④ ㉡ , ㉢　⑤ ㉠ , ㉡ , ㉢

해설

㉠ :$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2+\alpha+1=0$

㉡ :$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$, $\alpha^3=1$

$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3(1+\alpha+\alpha^2)+\cdots+\alpha^{15}=\alpha^{15}$

$=(\alpha^3)^5=1$ ($\because \alpha^2+\alpha+1=0$)

㉢ :$\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\alpha+\overline{\alpha}=-1, \alpha\overline{\alpha}=1$

$z=\dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}$, $\bar{z}=\dfrac{\overline{\alpha}+3}{2\overline{\alpha}+1}$

$z\bar{z}=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+3(\alpha+\overline{\alpha})+9}{4\alpha\overline{\alpha}+2(\alpha+\overline{\alpha})+1}=\dfrac{1-3+9}{4-2+1}=\dfrac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha+1=\sqrt{3}i, \alpha+3=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \dfrac{\alpha+3}{2\alpha+1}=\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$

$=-\dfrac{5i-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z\cdot\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3-5i}}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3+5i}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{3}$

5. 방정식 $|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}=x+3$의 근을 α,β라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

ⅰ) $x<-1$일 때,
$-(x+1)-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ ($x<-1$에 부적합)
ⅱ) $-1\le x<2$일 때,
$x+1-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=0$
ⅲ) $x\ge 2$일 때,
$x+1+x-2=x+3$
$\therefore\ x=4$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $x=0,\ 4$
$\therefore\ \alpha+\beta=4$

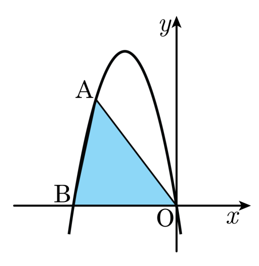
6. x에 관한 이차방정식 $x^2-k(k+3)x+k^2-1=0$의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k의 조건은?

① $-1<k\le 1$　② $-1<k<1$　③ $0<k\le 2$
④ $-1\le k\le 0$　⑤ $-1\le k\le 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β라 하자.
(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,
$\alpha\beta=k^2-1<0$, $(k+1)(k-1)<0$
$\therefore\ -1<k<1$
(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,
$\alpha+\beta=k(k+3)>0\quad\therefore\ k>0,\ k<-3$
$\alpha\beta=k^2-1=0\quad\therefore\ k=\pm1$
따라서, $k=1$
그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1<k\le 1$

7. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차 함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



① 18　② 27　③ 36

④ 45　⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0)$, $(-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{OB}}$ 라
고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의
넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times 9=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27$

8. 연립방정식 $\begin{cases} ab+bc=65 \\ ac+bc=17 \end{cases}$ 을 만족시키는 양의 정수쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수를 구하면?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$ac+bc=17$ 에서 $c(a+b)=17$

그런데 $a,\ b$ 는 양의 정수이므로 $a+b \geq 2$

$\therefore\ \ c=1,\ a+b=17$

위의 식들을 $ab+bc=65$ 에 대입하면

$a^2-16a+48=0$

$\therefore\ \ a=4$ 또는 $a=12$

따라서, $a=4$ 일 때 $b=13,\ c=1$

$a=12$ 일 때 $b=5,\ c=1$

9. 두 부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$, $x^2 - x + k \le 0$에 대하여 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3 < x \le 6$일 때, 상수 k 의 값은?

① -48　② -30　③ -18　④ 12　⑤ 24

해설

부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$ 에서
$(x+5)(x-3) > 0$, $x > 3$ 또는 $x < -5$
부등식 $x^2 - x + k \le 0$ 에 대하여
두 부등식의 공통범위가 $3 < x \le 6$ 이므로
$x^2 - x + k \le 0$ 를 만족하는 범위는
$-5 \le x \le 6$ $(x-6)(x+5) \le 0$
$x^2 - x - 30 \le 0$
$\therefore k = -30$

10. $|p| < 2$를 만족하는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2+px+1 > 2x+p$가 성립하도록 하는 x의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$
② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
③ $x \le -3$, $x \ge 1$
④ $x \le -1$, $x \ge 3$
⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$이라 하면, $f(p) > 0$이다.
$-2 < p < 2$에서 $f(p) > 0$이기 위한 조건은 $f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$
$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3 \cdots\cdots$ ㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$
$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x값의 범위는 $x \le -1$, $x \ge 3$

11. 임의의 실수 x, y에 대해서

$$y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11}　② 2^{12}　③ 2^{13}　④ 3^{11}　⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입 : $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$

$y = 0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$

각변끼리 빼주면

$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로

$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

12. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$
그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$
또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로
$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$
따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$
$\therefore$구하는 나머지의 상수항은 2

13. 어느 회사의 A공장과 B공장에서는 각각 모니터와 스피커를 만들고 있다. 하루에 A공장에서는 모니터를 400 대, B공장에서는 스피커를 10000 대 만든다. 모니터는 20000 대, 스피커는 80000 대가 만들어지면 본사 창고로 운반한다. 두 제품이 같은 날 창고에 운반되면 인력이 부족하여 용역회사에서 인력을 구하여야 한다. 이 때, 용역회사에서 평일은 50,000 원, 주말에는 70,000 원을 지불한다. 2008 년 4 월 1 일 목요일 처음으로 모니터를, 다음날 스피커를 운반하였다. 2008 년 연말까지 용역회사에서 지불할 금액을 구하여라.

▶ 답 : ____ 원

▷ 정답 : 390000 원

해설

4 월 1 일, 4 월 2 일 $\cdots$ 을 각각 1, 2$\cdots$ 라 하면
12 월 31 일은 275 이다.
모니터가 운반되는 날이 $5a+1$ 이고
스피커가 운반되는 날이 $8b+2$ 이면,
같은 날 창고에 운반 $\rightarrow 5a+1=8b+2$
$b=5k+1,\ 5k+2,\ 5k+3,\ 5k+4$ 를 대입하면
$b=5k+3$ 일 때, 성립한다.
그러므로 같은날 운반되는 경우
$\rightarrow 40k+26\ (k=0,\ 1,\ 2\cdots)$ 이다.
금년에 같은 날 운반
26, 66, 106, 146, 186, 226, 266 이고,
이들 중 평일은 5 일, 주말은 2 일 이므로
$(50000\times 5)+(70000\times 2) = 250000+140000 = 390000$

14. p와 q가 소수이고, $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

(가) 두 근의 차는 홀수이다.
(나) 적어도 한 근은 소수이다.
(다) p^2-q는 소수이다.
(라) $p+q$는 소수이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

해설

$x^2-px+q=0$의 서로 다른 양의 정수근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=p$ ……㉠
$\alpha\beta=q$ ……㉡이다.
그런데, q가 소수이므로 ㉡에서 두 근은 1과 q이다.
$\therefore$ ㉠에서 $1+q=p$ $\therefore$ $p-q=1$
그런데 p도 소수이므로 두 소수의 차가 1인 경우는 $p=3, q=2$ 일 때 뿐이다.
$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore$ $x=1,\ 2$
따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.

15. 둘레의 길이가 10 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l 이라고 하면 $2r+l=10$, $l=10-2r$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(10-2r) \\ &= -r^2+5r \\ &= -\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4} \end{aligned}$$

따라서 반지름이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 넓이가 최대가 된다.

16. 실수 x, y, z가 $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=14,\ x^3+y^3+z^3=20$을 만족할 때, $x-2y+z$의 값을 구하면? (단, $x<y<z$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x+y+z=2 \ldots$ ㉠

$x^2+y^2+z^2=14 \ldots$ ㉡

$x^3+y^3+z^3=20 \ldots$ ㉢

㉠, ㉡에서

$xy+yz+zx=-5 \ldots$ ㉣

$x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=20$

$\therefore xyz=-6 \ldots$ ㉤

㉠, ㉣, ㉤을 이용하여 $x,\ y,\ z$를

세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면

$t^3-2t^2-5t+6=0(t-1)(t+2)(t-3)=0$

$t=1,\ -2,\ 3$

$x<y<z$이므로 $x=-2\ y=1\ z=3$

$\therefore\ x-2y+z=-1$

17. 유치원에서 아이들에게 사탕을 한 사람당 3 개씩 나누어주면 25 개가 남고, 4 개씩 나누어 주면 마지막 한 명에게 1 개 이상 4 개 미만의 사탕을 줄 수 있다. 이 유치원 아이들의 수를 a 명이라 할 때, a 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 28

해설

유치원 아이들의 수를 a 명이라 할 때, 사탕의 갯수는 $3a+25$ 개이다.
4 개씩 주는 경우 마지막 한 명에게 1 개 이상 4 개 미만의 사탕을 줄 수 있으므로
$4(a-1)+1 \le 3a+25 \le 4(a-1)+3$
연립부등식을 풀면 $26 \le a \le 28$ 이므로
$a = 26, 27, 28$ 이다.

18. 샌드위치 A, B, C 를 만들기 위한 재료로 380 장의 햄, 120 장의 치즈가 있고, 계란은 190 개 이하가 있다. 샌드위치 A 에는 햄 1 장, 계란 1 개가 필요하고, 샌드위치 B 에는 햄 2 장, 치즈 1 장이 필요하고, 샌드위치 C 에는 햄 3 장, 치즈 1 장, 계란 2 개가 필요하다. 샌드위치 C 는 최대 몇 개까지 만들 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 50 개

해설

샌드위치 A, B, C 의 개수를 각각 x 개, y 개, z 개 로 놓고 사용한 재료의 개수를 구하면
햄의 개수는 $x + 2y + 3z = 380 \cdots$ ㉠
치즈의 개수는 $y + z = 120 \cdots$ ㉡
계란의 개수는 $x + 2z \leq 190 \cdots$ ㉢
㉠, ㉡ 에서 x, y 를 z 에 관해 나타내면
$y = 120 - z$, $x = 380 - 2(120 - z) - 3z = 140 - z$
이것을 ㉢ 에 대입하면
$140 - z + 2z \leq 190$
$\therefore\ z \leq 50$
따라서 만들 수 있는 샌드위치 C 의 최대 개수는 50 개이다.