

1. $f(2) = -15$, $g(-2) = 5$ 인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$ 의 곱이 $(x+3)^2(x^2 + 2x - 35)$, 최소공배수가 $(x+3)(x^2 + 3x - 35)$ 일 때, $f(-2) + g(2)$ 의 값은?

① 8

② 18

③ 28

④ 38

⑤ 48

해설

곱이 $(x+3)^2(x^2 + 2x - 35)$ 이고,

최소공배수가 $(x+3)(x^2 + 3x - 35)$ 이므로

두 이차식은 $(x+3)(x-5)$, $(x+3)(x+7)$

$f(2) = -15$ 이므로 $f(x) = (x+3)(x-5)$

$g(-2) = 5$ 이므로 $g(x) = (x+3)(x+7)$

$$\begin{aligned}\therefore f(-2) + g(2) &= (-2+3)(-2-5) + (2+3)(2+7) \\ &= (-7) + 45 = 38\end{aligned}$$

2. 다음은 유클리드 호제법 ‘두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.’ 를 보이는 과정이다.

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,
 $A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)로 나타낼 수 있다.
 A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
 $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
 $\therefore R = G(a - bQ)$
 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
 (가) m (일차이상의 다항식)이 존재하여
 $b = mk, a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
 $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
 a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
 $B = Gb, R = G(a - bQ)$ 에서
 b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

() 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

- | | |
|------------|------------|
| ① 공약수, 공약수 | ② 공약수, 서로소 |
| ③ 공약수, 공배수 | ④ 공배수, 서로소 |
| ⑤ 공배수, 공약수 | |

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
 $A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)이고,
 A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
 $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
 $\therefore R = (a - bQ)G$
 즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
 한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
 공약수인 m 이 존재하여
 $b = mk, a - bQ = mk'$
 $a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
 즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
 $B = Gb, R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

3. 복소수 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$ 로 나타낸다. $\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4 + 3i$

② $3 + 3i$

③ $2 + 3i$

④ $1 + 3i$

⑤ $-1 + 3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a + bi)(b + ai) \\ &= ab + a^2i + b^2i - ab = (a^2 + b^2)i\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{4+3i}{5} \text{ 이므로 } \alpha\alpha^* = \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i$$

$$\begin{aligned}\therefore 5\alpha^5(\alpha^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot \alpha^*)^4 \\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4 \\ &= 4 + 3i\end{aligned}$$

4. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15} = 1$

㉢ $z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$ 일 때, $z\bar{z} = \frac{7}{3}$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ : $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ : $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$, $\alpha^3 = 1$

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15}$

$= 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3(1 + \alpha + \alpha^2) + \cdots + \alpha^{15} = \alpha^{15}$

$= (\alpha^3)^5 = 1$ ($\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$)

㉢ : $\bar{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$, $\alpha + \bar{\alpha} = -1$, $\alpha\bar{\alpha} = 1$

$z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$, $\bar{z} = \frac{\bar{\alpha} + 3}{2\bar{\alpha} + 1}$

$z\bar{z} = \frac{\alpha\bar{\alpha} + 3(\alpha + \bar{\alpha}) + 9}{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 1} = \frac{1 - 3 + 9}{4 - 2 + 1} = \frac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha + 1 = \sqrt{3}i, \alpha + 3 = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1} = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$
 $= -\frac{5i - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z \cdot \bar{z} = \frac{\sqrt{3} - 5i}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} + 5i}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{3}$

5. 방정식 $|x+1| + \sqrt{(x-2)^2} = x+3$ 의 근을 α, β 라 할 때 $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① 0

② 4

③ 3

④ 2

⑤ 1

해설

i) $x < -1$ 일 때,

$$-(x+1) - (x-2) = x+3$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \quad (x < -1 \text{에 부적합})$$

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$x+1 - (x-2) = x+3$$

$$\therefore x = 0$$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$x+1 + x-2 = x+3$$

$$\therefore x = 4$$

(i), (ii), (iii)에 의해 $x = 0, 4$

$$\therefore \alpha + \beta = 4$$

6. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - k(k+3)x + k^2 - 1 = 0$ 의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k 의 조건은?

- ① $-1 < k \leq 1$ ② $-1 < k < 1$ ③ $0 < k \leq 2$
④ $-1 \leq k \leq 0$ ⑤ $-1 \leq k \leq 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β 라 하자.

(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,

$$\alpha\beta = k^2 - 1 < 0, (k+1)(k-1) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 1$$

(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,

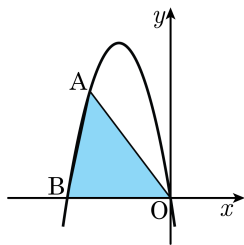
$$\alpha + \beta = k(k+3) > 0 \quad \therefore k > 0, k < -3$$

$$\alpha\beta = k^2 - 1 = 0 \quad \therefore k = \pm 1$$

따라서, $k = 1$

그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1 < k \leq 1$

7. 다음 그림은 축의 방정식이 $x = -3$ 인 이차 함수 $y = -x^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이의 최댓값은?



① 18

② 27

③ 36

④ 45

⑤ 54

해설

축이 $x = -3$ 이므로 B 의 좌표는 $(-6, 0)$ 이다.

따라서 $y = -x^2 + bx + c$ 가 두 점

$(0, 0)$, $(-6, 0)$ 을 지나므로,

$$0 = c, 0 = -36 - 6b$$

$$b = -6, c = 0$$

$$y = -x^2 - 6x = -(x + 3)^2 + 9$$

$\triangle OAB$ 에서 밑변의 길이를 $\overline{OB}$ 라

고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle OAB$ 의

넓이가 최대가 된다.

즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 9)$ 이므로

$$\triangle OAB \text{의 넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times 9 = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

8. 연립방정식 $\begin{cases} ab + bc = 65 \\ ac + bc = 17 \end{cases}$ 을 만족시키는 양의 정수쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$ac + bc = 17 \text{에서 } c(a + b) = 17$$

그런데 a, b 는 양의 정수이므로 $a + b \geq 2$

$$\therefore c = 1, a + b = 17$$

위의 식들을 $ab + bc = 65$ 에 대입하면

$$a^2 - 16a + 48 = 0$$

$$\therefore a = 4 \text{ 또는 } a = 12$$

따라서, $a = 4$ 일 때 $b = 13, c = 1$

$a = 12$ 일 때 $b = 5, c = 1$

9. 두 부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$, $x^2 - x + k \leq 0$ 에 대하여 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x 의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x 의 값은 $3 < x \leq 6$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -48

② -30

③ -18

④ 12

⑤ 24

해설

부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$ 에서

$$(x+5)(x-3) > 0, x > 3 \text{ 또는 } x < -5$$

부등식 $x^2 - x + k \leq 0$ 에 대하여

두 부등식의 공통범위가 $3 < x \leq 6$ 이므로

$x^2 - x + k \leq 0$ 를 만족하는 범위는

$$-5 \leq x \leq 6 \quad (x-6)(x+5) \leq 0$$

$$x^2 - x - 30 \leq 0$$

$$\therefore k = -30$$

10. $|p| < 2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?

① $x \leq -3, x = -1, x \geq 1$

② $x \leq -1, x = 1, x \geq 3$

③ $x \leq -3, x \geq 1$

④ $x \leq -1, x \geq 3$

⑤ $-3 \leq x \leq -1$

해설

$$x^2 + px + 1 > 2x + p, (x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$$

$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$ 이라 하면, $f(p) > 0$ 이다.

$-2 < p < 2$ 에서 $f(p) > 0$ 이기 위한 조건은 $f(-2) \geq 0$ 이고 $f(2) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f(-2) \geq 0 \text{ 에서 } x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\therefore (x-1)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 1, x \geq 3 \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

$$f(2) \geq 0 \text{ 에서 } x^2 - 1 \geq 0$$

$$\therefore (x+1)(x-1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1, x \geq 1 \dots\dots \textcircled{\Delta}$$

$$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta} \text{에서 } \therefore x \leq -1, x = 1, x \geq 3$$

그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \leq -1, x \geq 3$

11. 임의의 실수 x, y 에 대해서

$$y^{12} + 1 = x_0 + x_1(y-1) + x_2(y-1)^2 + x_3(y-1)^3 + \cdots + x_{12}(y-1)^{12}$$

이 성립할 때, $x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}$ 의 값은?

① 2^{11}

② 2^{12}

③ 2^{13}

④ 3^{11}

⑤ 3^{12}

해설

$y = 2$ 대입 : $2^{12} + 1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}$

$y = 0$ 대입 : $1 = x_0 - x_1 + x_2 - \cdots + x_{12}$

각변끼리 빼주면

$2^{12} = 2(x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11})$ 이므로

$x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{11} = 2^{12-1} = 2^{11}$

12. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라고 하면,

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

그런데 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + (x + 1)$$

또 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이므로

$$f(1) = 2a + 2 = 4 \text{에서 } a = 1$$

$$\text{따라서 } ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1 = x^2 + x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

13. 어느 회사의 A 공장과 B 공장에서는 각각 모니터와 스피커를 만들고 있다. 하루에 A 공장에서는 모니터를 400 대, B 공장에서는 스피커를 10000 대 만든다. 모니터는 20000 대, 스피커는 80000 대가 만들어지면 본사 창고로 운반한다. 두 제품이 같은 날 창고에 운반되면 인력이 부족하여 용역회사에서 인력을 구하여야 한다. 이 때, 용역회사에서 평일은 50,000 원, 주말에는 70,000 원을 지불한다. 2008년 4월 1일 목요일 처음으로 모니터를, 다음날 스피커를 운반하였다. 2008년 연말까지 용역회사에서 지불할 금액을 구하여라.

▶ 답 : 원

▷ 정답 : 390000 원

해설

4월 1일, 4월 2일 ... 을 각각 1, 2... 라 하면
12월 31일은 275이다.

모니터가 운반되는 날이 $5a + 1$ 이고

스피커가 운반되는 날이 $8b + 2$ 이면,

같은 날 창고에 운반 $\rightarrow 5a + 1 = 8b + 2$

$b = 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4$ 를 대입하면

$b = 5k + 3$ 일 때, 성립한다.

그러므로 같은날 운반되는 경우

$\rightarrow 40k + 26$ ($k = 0, 1, 2 \dots$) 이다.

금년에 같은 날 운반

26, 66, 106, 146, 186, 226, 266 이고,

이들 중 평일은 5일, 주말은 2일 이므로

$$(50000 \times 5) + (70000 \times 2) = 250000 + 140000 = 390000$$

14. p 와 q 가 소수이고, $x^2 - px + q = 0$ 이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

- (가) 두 근의 차는 홀수이다.
(나) 적어도 한 근은 소수이다.
(다) $p^2 - q$ 는 소수이다.
(라) $p + q$ 는 소수이다.

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 0개

해설

$x^2 - px + q = 0$ 의 서로 다른 양의 정수근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = p$ ㉠

$\alpha\beta = q$ ㉡이다.

그런데, q 가 소수이므로 ㉡에서 두 근은 1과 q 이다.

$\therefore$ ㉠에서 $1 + q = p \quad \therefore p - q = 1$

그런데 p 도 소수이므로 두 소수의 차이가 1인 경우는 $p = 3, q = 2$ 일 때 뿐이다.

$x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x - 1)(x - 2) = 0$

$\therefore x = 1, 2$

따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.

15. 둘레의 길이가 10 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라고 하면 $2r + l = 10$, $l = 10 - 2r$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(10 - 2r) \\ &= -r^2 + 5r \\ &= -\left(r - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

따라서 반지름이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 넓이가 최대가 된다.

16. 실수 x, y, z 가 $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x^3 + y^3 + z^3 = 20$ 을 만족할 때, $x - 2y + z$ 의 값을 구하면? (단, $x < y < z$)

▶ 답 :

▶ 정답 : -1

해설

$$x + y + z = 2 \dots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14 \dots \textcircled{㉡}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 20 \dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$xy + yz + zx = -5 \dots \textcircled{㉣}$$

$$x^3 + y^3 + z^3$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

$$= 20$$

$$\therefore xyz = -6 \dots \textcircled{㉤}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉣}, \textcircled{㉤}$ 을 이용하여 x, y, z 를

세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면

$$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0(t - 1)(t + 2)(t - 3) = 0$$

$$t = 1, -2, 3$$

$$x < y < z \text{ 이므로 } x = -2 \ y = 1 \ z = 3$$

$$\therefore x - 2y + z = -1$$

17. 유치원에서 아이들에게 사탕을 한 사람당 3 개씩 나누어주면 25 개가 남고, 4 개씩 나누어 주면 마지막 한 명에게 1 개 이상 4 개 미만의 사탕을 줄 수 있다. 이 유치원 아이들의 수를 a 명이라 할 때, a 가 될 수 있는 수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

▷ 정답 : 27

▷ 정답 : 28

해설

유치원 아이들의 수를 a 명이라 할 때, 사탕의 갯수는 $3a + 25$ 개이다.

4 개씩 주는 경우 마지막 한 명에게 1 개 이상 4 개 미만의 사탕을 줄 수 있으므로

$$4(a - 1) + 1 \leq 3a + 25 \leq 4(a - 1) + 3$$

연립부등식을 풀면 $26 \leq a \leq 28$ 이므로

$a = 26, 27, 28$ 이다.

18. 샌드위치 A, B, C 를 만들기 위한 재료로 380 장의 햄, 120 장의 치즈가 있고, 계란은 190 개 이하가 있다. 샌드위치 A 에는 햄 1 장, 계란 1 개가 필요하고, 샌드위치 B 에는 햄 2 장, 치즈 1 장이 필요하고, 샌드위치 C 에는 햄 3 장, 치즈 1 장, 계란 2 개가 필요하다. 샌드위치 C 는 최대 몇 개까지 만들 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 50 개

해설

샌드위치 A, B, C 의 개수를 각각 x 개, y 개, z 개 로 놓고 사용한 재료의 개수를 구하면

$$\text{햄의 개수는 } x + 2y + 3z = 380 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\text{치즈의 개수는 } y + z = 120 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\text{계란의 개수는 } x + 2z \leq 190 \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 x, y 를 z 에 관해 나타내면

$$y = 120 - z, x = 380 - 2(120 - z) - 3z = 140 - z$$

이것을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면

$$140 - z + 2z \leq 190$$

$$\therefore z \leq 50$$

따라서 만들 수 있는 샌드위치 C 의 최대 개수는 50 개이다.