

1. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 이고, $a = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

② $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$

③ $\frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$

④ $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

⑤ $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$$

(ii) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$$= \frac{1}{a^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

2. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times \text{몫} - 3$
 $x^2 + x - 1 = 0$
 $\therefore x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$$\begin{aligned}x^2 &= -x + 1 \\x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\&= x(-x + 1)^2 - 5x \\&= x^3 - 2x^2 - 4x \\&= x(-x + 1) - 2(-x + 1) - 4x \\&= -x^2 - x - 2 \\&= -(x^2 + x) - 2 \\&= -1 - 2 = -3\end{aligned}$$

3. $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=2$ 일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 의 값을 구하면?

- ① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$ 을
 $xy+yz+zx=1$ 을 이용하여 변형하면
 $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$
 $= (1-zx)(1-xy)(1-yz)$
 $= 1 - (xy+yz+zx) + (x^2yz + xy^2z + xyz^2) - (xyz)^2$
 $= 1 - (xy+yz+zx) + xyz(x+y+z) - (xyz)^2$
 $= 1 - 1 + 2 \cdot 4 - 4$
 $= 4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$
 $= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

4. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$
$$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

- ① 0
- ② -1
- ③ 1
- ④ -10
- ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면,

(우변) = $\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$

양변의 계수를 비교하면

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$

5. $x - \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$

② $\pm 5\sqrt{5}$

③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm \sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm \sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$$

6. $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 을 동시에 만족시키는 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 11

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

(i) $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 에서

x, y 를 z 에 대하여 나타내면

$$x = 2z + 1, y = -3z - 1$$

(ii) $x = 2z + 1$, $y = -3z - 1$ 을 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$(4a + 9b + c)z^2 + 2(2a + 3b)z + (a + b - 1) = 0$$

$$\therefore 4a + 9b + c = 0, 2a + 3b = 0, a + b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

7. 다항식 $f(x)$ 를 $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ 로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$ 를 $3x - 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

- ① $Q(x), R$ ② $3Q(x), R$ ③ $Q(x), 3R$
④ $\frac{1}{3}Q(x), R$ ⑤ $Q(x), \frac{1}{3}R$

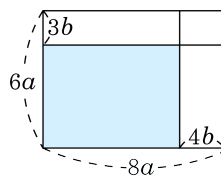
해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{2}{3}\right)Q(x) + R \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}Q(x) + R \\ &= (3x - 2)\frac{1}{3}Q(x) + R \end{aligned}$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

$$\text{몫: } \frac{1}{3}Q(x) \quad \text{나머지: } R$$

8. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2 - 7ab + 2b^2$

② $36a^2 - 42ab + 12b^2$

③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$

④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$

⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$$

9. 모든 x 에 대하여 $f(x+1) - f(x-1) = 6x^2 + 6$, $f(0) = 1$ 을 만족시키는 다항식 $f(x)$ 가 있다. 다음은 자연수 n 에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \dots + \alpha^n$ 을 이용하여, $f(x)$ 를 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ (단, } a_n \neq 0 \text{) 라고 놓으면} \\
 f(x+1) - f(x-1) \\
 &= a_n \{ (x+1)^n - (x-1)^n \} + a_{n-1} \{ (x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1} \} + \dots + \\
 &\quad a_1 \{ (x+1) - (x-1) \} \\
 &= \boxed{} x^{n-1} + \dots = 6x^2 + 6 \\
 \text{예} \text{서 } n &= 3, \ a_n = 1 \\
 \therefore f(x) &= x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 1 \\
 f(x+1) - f(x-1) &= 6x^2 + 4a_2 x + 2 + 2a_1 \\
 \text{이} \text{므로 } a_2 &= 0, \ a_1 = 2 \text{ 즉, } f(x) = x^3 + 2x + 1
 \end{aligned}$$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$ 에 알맞은 것은?

- ① a_n

② $2a_n$

③ na_n

④ $2na_n$

⑤ $3na_n$

해설

$$\begin{aligned}
 f(x+1) - f(x-1) \\
 &= a_n \{ (x+1)^n - (x-1)^n \} + a_{n-1} \{ (x+1)^{n-1} - (x-1)^{n-1} \} \dots \\
 &= a_n \{ (x^n + nx^{n-1} + \dots) - (x^n - nx^{n-1} + \dots) \} + a_{n-1} \{ (x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots) - (x^{n-1} - (n-1)x^{n-2} + \dots) \} + \dots \\
 &= a_n (2nx^{n-1} + \dots) + a_{n-1} \{ 2(n-1)x^{n-2} + \dots \} + \dots \\
 &= 2na_n x^{n-1} + \{ (n-2) \text{ 차 이하의 다항식} \} \\
 \therefore 2na_n x^{n-1} &= 6x^2 \text{ 예} \text{서} \\
 n-1 &= 2, \ 2na_n = 6 \\
 \therefore n &= 3, \ a_n = 1
 \end{aligned}$$

10. x 에 대한 다항식 $x^{10}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x - 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x - 2)$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $3b - 2a$ 의 값은?

① 3

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x - 2)^2 Q(x) + 2^{10}(x - 2)$$

$$x^{10}(x^2 + ax + b) = (x - 2) \{ (x - 2) Q(x) + 2^{10} \} \text{이므로}$$

$$x^2 + ax + b = (x - 2)(x - \alpha) \text{라 할 수 있다.}$$

$$x^{10}(x - 2)(x - \alpha) = (x - 2) \{ (x - 2) Q(x) + 2^{10} \}$$

$$\therefore x^{10}(x - \alpha) = (x - 2) Q(x) + 2^{10}$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$2^{10}(2 - \alpha) = 2^{10} \therefore \alpha = 1$$

$$\therefore x^2 + ax + b = (x - 2)(x - 1)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

$$a = -3, b = 2$$

$$\therefore 3b - 2a = 12$$

11. $(1-x-x^2)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$ 라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = A$, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99} = B$ 에 대하여
 $A + 2B$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 100 ⑤ 1024

해설

- (i) 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{1}$
 양변에 $x = -1$ 을 대입하면
 $1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{99} + a_{100} \cdots \textcircled{2}$
 (ii) $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 하면 $2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{100})$
 $\therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1$
 $\therefore A = 1$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 하면
 $0 = 2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{99})$
 $a_1 + a_3 + \cdots + a_{99} = 0 \quad \therefore B = 0$
 $\therefore A + 2B = 1$

12. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x - 4$

② $4x - 1$

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$$w^2 + w + 1 = 0, \text{ 양변에 } (w - 1) \text{ 을 곱하면}$$

$$w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$$

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b \text{ 에}$$

w 를 대입하면,

$$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$$

$$3 = aw + b$$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

$\therefore$ 나머지= 3

13. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)^2$ 으로 나눌 때, 나머지를 ax^2+bx+c 라 하면 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지가 4이므로
 $f(-1)=4$
 $f(x)=(x-1)^2Q(x)\cdots\textcircled{1}$
 $f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
 $\qquad=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+a(x-1)^2\ (\because \textcircled{1})$
양변에 $x=-1$ 를 대입하면
 $f(-1)=4a=4\therefore a=1$
 $ax^2+bx+c=a(x-1)^2=x^2-2x+1$
 $\therefore b=-2, c=1$
 $\therefore a+b+c=0$

해설

ax^2+bx+c 를 구하는 것이 아니라 $a+b+c$ 를 통째로 구할 때는 다음과 같이 풀 수 있다.
 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로 $f(1)=0$
 $f(x)=(x+1)(x-1)^2Q'(x)+ax^2+bx+c$
양변에 $x=1$ 를 대입하면
 $f(1)=0+(a+b+c)=0$
 $\therefore a+b+c=0$

14. x^3 의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는?

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 한다.
 $f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
 $\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x, f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 27 = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
 $a = -6, b = 12, c = -6$
 $\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
 $\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

15. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

- ① -8
- ② -4
- ③ 0
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$
ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$
iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$
iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.
 $a = 1, b = 4, c = 6, d = 4, e = 1$
 $\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$
(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$
다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

1		1	0	0	0	0
			1	1	1	1
1		1	1	1	1	<u>1</u> = e
			1	2	3	
1		1	2	3	<u>4</u> = d	
			1	3		
1		1	3	<u>6</u> = c		
			1			
a = 1		<u>4</u> = b				

$\therefore 2c - bd = -4$