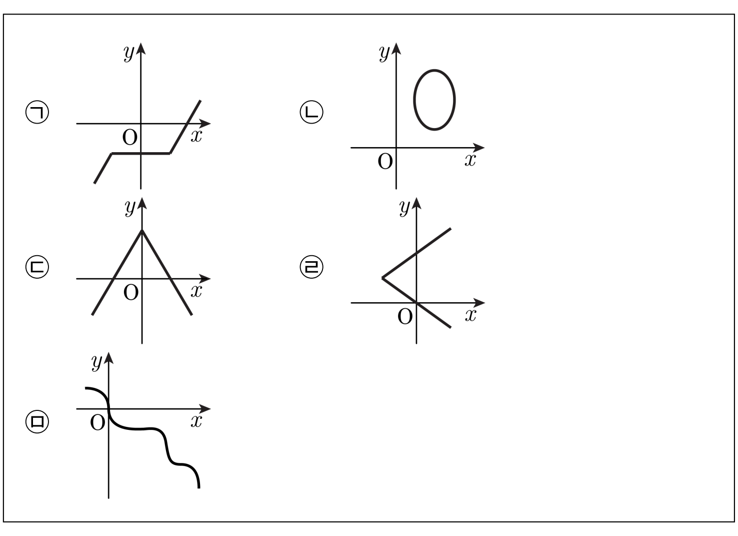
1. 다음 그래프 중 함수인 것은?



① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉢, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉤ ⑤ ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉠ 함수
㉡ 함수가 아니다.
㉢ 함수
㉣ 함수가 아니다.
㉤ 함수
따라서 ㉠, ㉢, ㉤만이 함수이다.

2. 실수의 집합에서 실수의 집합으로의 함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어질 때 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 를 차례대로 구하여라.

$$f(x) = 2x + 1$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 5

해설

다음 요령에 따르면 된다.
$f(0) = 2\times\ 0+1 = 1$, $f(1) = 2\times 1+1 = 3$, $f(2) = 2\times\ 2+1 = 5$

3. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$일 때, $x \in X$인 임의의 x에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \to 1$

② $x \to |x|$

③ $x \to x^2 + 1$

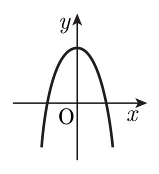
④ $x \to 2x$

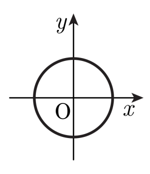
⑤ $x \to x^2 + x + 1$

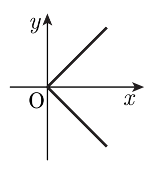
해설

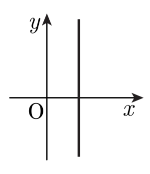
④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

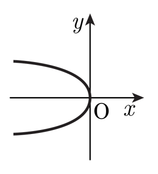
4. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


②


③


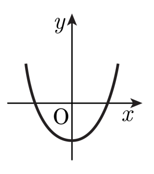
④


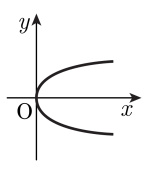
⑤


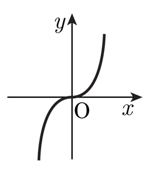
해설

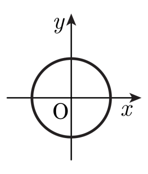
함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

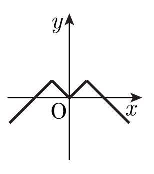
5. 다음 중에서 함수의 그래프가 아닌 것을 모두 고르면?

① 

② 

③ 

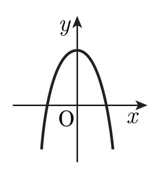
④ 

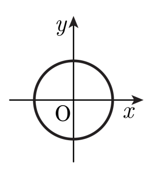
⑤ 

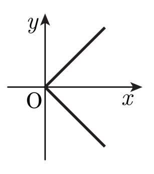
해설

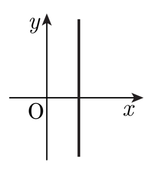
②, ④의 그래프는 하나의 x의 값에 대응되는 y가 2개 이상이므로 함수의 그래프가 아니다. (x축에 수선을 그어서 한 점에서 만나면 X에서 Y로의 함수)

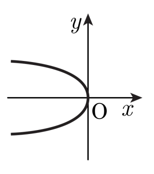
6. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

① 

② 

③ 

④ 

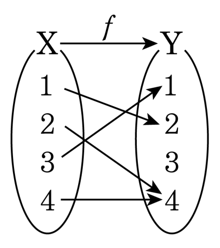
⑤ 

해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

7. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ 함수가 아니다.
㉡ 정의역은 1, 2, 3, 4이다.
㉢ 공역은 1, 2, 3, 4이다.
㉣ 치역은 1, 2, 3, 4이다.
㉤ 일대일대응이다.



① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 주어진 대응 x 의 각 원소에 y 가 1개씩 대응하므로 함수이다.
㉡, ㉢ 정의역과 공역은 모두 $1, 2, 3, 4$ 이다.
㉣ 치역은 1, 2, 4이다.
㉤ $f(2) = f(4) = 4$ 이고, $\mathrm{Y} \neq f(x)$ 이므로 일대일대응이 아니다.

8. 실수 전체의 집합을 R이라 할 때, 다음 중 R에서 R로의 함수가 될 수 없는 것은 무엇인가?

① $y = 0$ ② $y = -x + 4$ ③ $y = (x-1)^2$

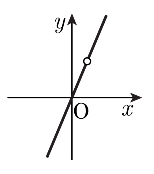
④ $x = y^2 + 4$ ⑤ $y = x^3$

해설

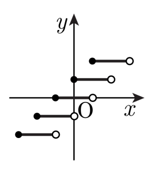
4일 때, $5 = y^2 + 4$, $y^2 = 1$에서 $y = \pm 1$
즉, $x = 5$에 대응하는 y의 값이
-1, 1의 두 개이므로 함수가 될 수 없다.

9. 정의역이 모든 실수일 때, 다음 그래프 중에서 x에서 y로의 함수인 것은?

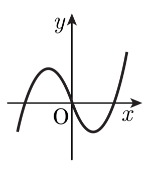
①



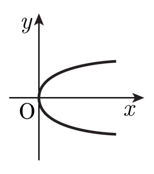
②



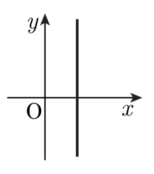
③



④



⑤



해설

①은 대응되지 못하는 x의 값이 존재하고
②, ④, ⑤는 x의 한 값에
y의 값이 2개 이상 대응하므로 함수가 아니다.

10. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로
$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서
$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$
$(x-5)(x+1)=0$
$\therefore\ x=5,\ -1$
즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.
$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

11. 실수의 집합을 R이라 할 때, 함수 $f : R \to R$가 다음과 같이 정해져 있다. 이 때, 일대일 대응인 것은?

① $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ ② $f(x) = x^2$

③ $f(x) = |x|$ ④ $f(x) = 2$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

해설

치역이 실수이고 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 것은 증가만 하거나 감소만 하는 그래프이다.
①은 직선으로서 $a > 0$이면 증가하고 $a < 0$이면 감소하는 그래프이다.

12. $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+1}$ 에 대하여 $f(25)$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{45}{51}$ ② $\dfrac{46}{51}$ ③ $\dfrac{47}{51}$ ④ $\dfrac{48}{51}$ ⑤ $\dfrac{49}{51}$

해설

$\therefore f(25)=\dfrac{2\times 25-1}{2\times 25+1}=\dfrac{49}{51}$

13. $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=3x+2$일 때, $f(2)$의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 8 ④ 11 ⑤ 12

해설

$\frac{x+1}{2}=2$에서 $x=3$

$\therefore f(2)=11$

14. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $g(x+2) = f(x+1)$로 정의될 때, $g(0)$의 값은?

① 3　　② 2　　③ 1　　④ 0　　⑤ -1

해설

$g(x+2) = f(x+1)$에서 $g(0)$은 $x = -2$에서의 값이므로 $f(-1)$이다.
따라서 $g(0) = f(-1) = 3$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & (x\text{가 유리수})\\ 2x & (x\text{가 무리수})\end{cases}$$ 일 때,

$f(x)-f(x-1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(i) x가 유리수일 때, $x-1$도 유리수이므로

$f(x)-f(x-1)=2x-1-\{2(x-1)-1\}$

$=2x-1-(2x-3)=2$

(ii) x가 무리수일 때, $x-1$도 무리수이므로

$f(x)-f(x-1)=2x-2(x-1)=2$

따라서 (i),(ii)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-f(x-1)=2$

16. f 는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

> ㉠ $f(2n) = 2 \cdot f(n)(n = 1, 2, 3, \cdots)$
>
> ㉡ $f(2n+1) = (-1)^n \cdot 2(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

이

때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

17. 2 이상의 자연수의 집합 A 에서 A 로 다음과 같이 정의된 함수 f 가 있다.

$f(p) = p$ (p가 소수)
$f(rs) = f(r) + f(s) (r, s \in A)$

이 때, $f(2400)$ 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 23

해설

$$\begin{aligned} f(2400) &= f(2^5 \cdot 3 \cdot 5^2) = f(2^5) + f(3) + f(5^2) \\ &= 5f(2) + f(3) + 2f(5) \\ &= 5 \cdot 2 + 3 + 2 \cdot 5 = 23 \end{aligned}$$

18. 함수 f 의 정의역이 $A = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$이고,

$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in Q) \\ 1 & (x \notin Q) \end{cases}$ 이라고 한다. 위 함수의 그래프에 대한 설명 중 맞는 것은?(Q는 유리수 전체의 집합)

① 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

② 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다

③ 부등식 $y \ge x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 무수히 많다.

④ 부등식 $y < x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 없다.

⑤ 부등식 $y < x(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ 의 영역 안에 있는 점은 1 개이다.

해설

함수 f 의 그래프를 그리면 y값이 0, 1인 점이 조밀하게 평면 위에 있다.
따라서 부등식 $y \ge x,\ \ y < x$ 의 영역 안에도 무수히 많다

19. 자연수 n을 $n = 2^p \cdot k$ (p는 음이 아닌 정수, k는 홀수)로 나타낼 때, $f(n) = p$라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$이다. 다음 <보기>중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

ㄱ n이 홀수이면 $f(n) = 0$이다.

ㄴ $f(8) < f(24)$이다.

ㄷ $f(n) = 3$인 자연수 n은 무한히 많다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

$n = 2^p \cdot k$에서
ㄱ n이 홀수이면, k가 홀수이므로 2^p이 홀수
$\therefore p = 0$ 즉, $f(n) = 0$
ㄴ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
ㄷ $f(n) = 3$에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k는 무수히 많으므로 n도 무수히 많다.

20. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.
$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$ ② $2a + b$ ③ $2a + 3b$
④ $3a + b$ ⑤ $3a + 2b$

해설

$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$
$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$
$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$
따라서 $3f(2) + f(3) = 3a + b$

21. 함수 f가 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서

$x=0,\ y=0$ 을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0),\ f(0)=2f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

22. 함수 $f : A \to B$ 에서 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \left\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\right\}$ 이고, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 일 때, $\left\{f(1)\right\}^2+\left\{f(2)\right\}^2+\left\{f(3)\right\}^2+\left\{f(4)\right\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 이므로
$B = \left\{1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}\right\}$ 에서 $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$ 으로 표현된다.
이 때, 정의역 중에서 $1,\ \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.
따라서 $\left\{f(1)\right\}^2+\left\{f(2)\right\}^2+\left\{f(3)\right\}^2+\left\{f(4)\right\}^2$
$= 1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2 = 9$

23. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1)=f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1)=f(x-1)$의 양변에
$x=-1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) = g(0) &= f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2\times(-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

24. 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 일 때, 다음 보기 중 서로 같은 함수를 찾으면?

보기

㉠ $f(x) = \sqrt{x^2}$	㉡ $g(x) = \lvert x \rvert$
㉢ $h(x) = x^2$	㉣ $k(x) = x^4 + x^3 + x^2$

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠. $f(-1) = \sqrt{(-1)^2} = 1,$

$f(0) = \sqrt{0^2} = 0,$

$f(1) = \sqrt{1^2} = 1$

㉡. $g(x) = \lvert x \rvert = \sqrt{x^2} = f(x)$

㉢. $h(-1) = (-1)^2 = 1,$

$h(0) = 0^2 = 0,$

$h(1) = 1^2 = 1$

㉣. $k(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = 1,$

$k(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 = 0,$

$k(1) = 1^4 + 1^3 + 1^2 = 3$

25. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $f(x) = x - 2,\ g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

㉡ $f(x) = |x|,\ g(x) = \sqrt{x^2}$

㉢ 정의역이 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$일 때,
$f(x) = x^3,\ g(x) = 2x^2 + x - 2$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠는 $x = 2$ 에서 다른 함수이나
㉡, ㉢는 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

26. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = ax - 3$, $g(x) = 2x + b$ 에 대하여 $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하면?

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

$f(1) = g(1)$ 에서 $a - 3 = 2 + b$
$\therefore\ a - b = 5 \cdots$ ㉠
$f(2) = g(2)$ 에서 $2a - 3 = 4 + b$
$\therefore\ 2a - b = 7 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $a = 2$, $b = -3$
$\therefore\ a - b = 2 - (-3) = 5$

27. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.
$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$
$\therefore$ $x = 4$ 또는 $x = -2$
즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.
$\therefore a = 3$

28. 정의역이 $\{-1,\ 0,\ 1\}$ 인 두 함수 $f(x)=-|x|,\ g(x)=-x^2$ 의 관계는?

① 두 함수는 상등이다.

② 두 함수는 상등이 아니다.

③ $\{y|y=f(x)\}\subset\{y|y=g(x)\}$

④ $\{y|y=f(x)\}\supset\{y|y=f(g)\}$

⑤ $f(x)+g(x)=0$

해설

$f(-1)=g(-1)=-1\ f(0)=g(0)=0$
$f(1)=g(1)=-1$
따라서 두 함수는 상등이다.

29. 두 집합 $X = \{-1,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 두 함수 $f(x) = ax - b$, $g(x) = x^3 + x - 1$ 가 서로 같을 때, 상수 a, b의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 함수가 서로 같으므로
$f(-1) = g(-1)$, $f(1) = g(1)$ 이다.
$-a - b = -3$, $a - b = 1$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 2$, $b = 1$
$\therefore\ a + b = 3$

30. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{y|y$는 정수$\}$에 대하여 두 함수 $f,\ g$를 X에서 Y로의 함수로 정의한다. $f(x) = x-1,\ g(x) = ax^2+bx+c$라 할 때, $f = g$가 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f = g$에서
$f(-1) = g(-1),\ f(0) = g(0),\ f(1) = g(1)$이므로
$f(-1) = g(-1)$에서 $-2 = a-b+c \cdots$ ㉠
$f(0) = g(0)$ 에서 $-1 = c \cdots$ ㉡
$f(1) = g(1)$ 에서 $0 = a+b+c \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $a = 0,\ b = 1,\ c = -1$
$\therefore abc = 0$

31. 집합 $X=\{-1,0,1\}$이 정의역인 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=-x^3+a$가 서로 같은 함수일 때, 상수 a, b의 곱 ab를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

ⅰ) $f(1)=g(1)$ 에서 $a+b=-1+a$
$b=-1$

ⅱ) $f(0)=g(0)$ 에서 $a=b$
$a=-1$

$\therefore\ ab=(-1)(-1)=1$

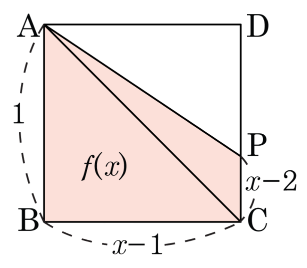
32. 실수를 원소로 갖는 집합 X가 정의역인 두 함수 $f(x) = x^2$과 $g(x) = x^3 - 2x$가 같을 때, X의 개수는 몇 개인가?

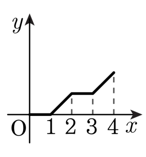
① 3개　② 4개　③ 7개　④ 8개　⑤ 16개

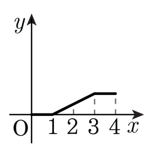
해설

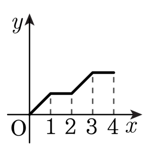
두 함수의 정의역은 같으므로 $f(x) = g(x)$에서
$x^2 = x^3 - 2x,\ x^3 - x^2 - 2x = 0$
$x(x+1)(x-2) = 0,\ x = -1,\ 0,\ 2$
$\therefore\ \mathrm{X} = \{-1,\ 0,\ 2\}$
따라서 X의 공집합을 제외한
부분집합이 되므로 7개

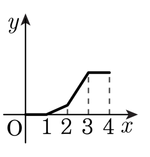
33. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

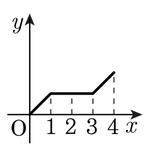


①


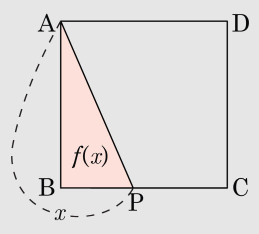
②


③


④


⑤


해설



x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

34. 함수 $f(x)$가 임의의 x, y에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2$, $f(x)=f(-x)$를 만족시킬 때, $f(1)\cdot f(2)$의 값은? (단, $f(0)=1$)

① 1 ② 4 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

임의의 x, y에 대하여 $f(x+y)+f(y-x)-2f(y)=2x^2$, $f(x)=f(-x)$일 때

ⅰ) $x=1$, $y=0$을 대입

$f(1+0)+f(0-1)-2f(0)=2\times 1$ ($\because$ $f(0)=1$)

$f(1)+f(-1)-2\times 1=2\times 1$

$2f(1)=4$ ($\because f(1)=f(-1)$) $\rightarrow f(1)=2$

ⅱ) $x=1$, $y=1$을 대입

$f(1+1)+f(1-1)-2f(1)=2\times 1$

$f(2)+f(0)-2\times 2=2$

$f(2)+1-4=2 \rightarrow f(2)=5$

$\therefore$ $f(1)\cdot f(2)=2\times 5=10$

35. 함수 $f(x)=x^2+x-2$가 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에서 정의되어 있을 때, $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X의 원소의 개수를 a개라 할 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답: ________ 개

▷ 정답: 4개

해설

$f(x)$가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면
$f(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$에서 $(x+2)$가 2의 배수인 동시에 $(x-1)$가 2의 배수인 x는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.
1) $(x+2)$가 4의 배수일 경우 : $x=2,\ 6,\ 10$
2) $(x-1)$이 4의 배수일 경우 : $x=1,\ 5,\ 9$
$\therefore\ x=1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10$
따라서 $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 3, 4, 7, 8의 4개이다.
$\therefore\ a=4$

36. 정의역과 공역이 모두 자연수의 집합인 함수 $f(n)$ 이 있다. $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 이고, $f(7) = 21$ 일 때, $f(9)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 55

해설

$f(1) = a,\ f(2) = b$ 라고하면 $f(3) = a + b$
$f(4) = a + 2b$
$f(5) = 2a + 3b$
$f(6) = 3a + 5b$
$f(7) = 5a + 8b = 21$ 을 만족하는 자연수는
$\therefore\ a = 1,\ b = 2$
$f(8) = 8a + 13b$
$f(9) = 13a + 21b = 13 + 42 = 55$

37. 임의의 양수 x, y에 대하여 항상 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 인 관계가 성립할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(1) = 0$　　② $f(6) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(2x)$　　④ $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

해설

① $f(0) = f(1 \times 0) = f(1) + f(0)$

$\therefore\ f(1) = 0$

② $f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3)$

③ $f(x^2) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$

④ $f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(1) = 0$ 이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

⑤ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= f(x) - f(y)$($\because$ ④가참)

38. 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족하는 $f(x)$ 는?

① $f(x)=x^2-4$
② $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$
③ $f(x)=x^2+1$
④ $f(x)=2x$
⑤ $f(x)=\sqrt{x+1}$

해설

$f(x)=2x$에서
$f(a+b)=2(a+b)$
$f(a)+f(b)=2a+2b$이므로 $f(a+b)=f(a)+f(b)$가 성립한다.
∴ ④

39. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4)+3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$ ② $2f(7)$ ③ $f(7)$ ④ $f(8)$ ⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2)=(n+1)+f(n)$ 을 이용하여 $f(4)+f(5)=f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2f(4)+3f(5) &= f(4)+f(5)+f(4)+f(5)+f(5) \\ &= f(6)+f(6)+f(5) \end{aligned}$$

또 $f(5)+f(6)=f(7), f(6)+f(7)=f(8)$ 이므로

$2f(4)+3f(5)=f(6)+f(7)=f(8)$ 이다.

40. 모든 실수 x 에 대하여 식 $x^2f(x)+f(1-x)=x^4-2x$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

식 $x^2f(x)+f(1-x)=x^4-2x$ 에서
$x=2$ 를 대입하면
$4f(2)+f(-1)=12 \cdots$ ㉠
$x=-1$ 을 대입하면
$f(-1)+f(2)=3 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 ㉠ − ㉡ 을 하면 $3f(2)=9$
$\therefore\ f(2)=3$

41. 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(1) = 2$ 일 때, $f(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 60

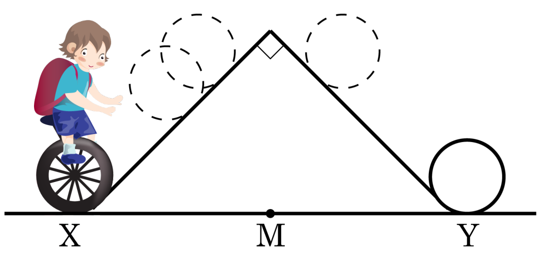
해설

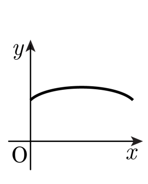
식 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
$x = 1$, $y = 1$ 을 대입하면
$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$
$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1)$
$f(4) = f(3+1) = f(3) + f(1) = 4f(1)$ 이다.

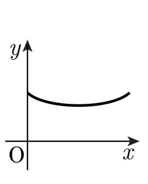
$\vdots$

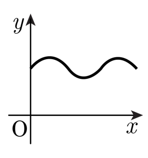
$f(n-1) = (n-1)f(1)$ 이라 놓으면
$f(n) = f((n-1)+1) = f(n-1) + f(1) = nf(1)$
따라서 $f(30) = 30f(1) = 30 \cdot 2 = 60$ 이다.

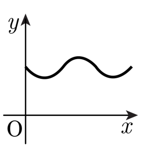
42. 다음 그림과 같이 철수가 외발자전거를 타고 직각이등변삼각형 모양의 장애물을 넘어가려고 한다. 지면과 장애물에 자전거의 바퀴가 동시에 접하는 지면 위의 접점을 X, Y라 하고, 선분 XY의 중점을 M이라 하자. 철수가 X에서 출발하여 최단 거리로 Y까지 일정한 속도로 이동할 때, 시간 t와 점 M에서 자전거 바퀴의 중심까지의 거리 d에 대하여 d를 t의 함수로 나타낸 그래프의 개형은? (단, 자전거 바퀴의 모양은 항상 원이며 지름의 길이는 장애물의 높이보다 작다.)

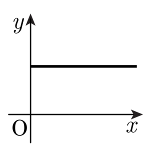


①


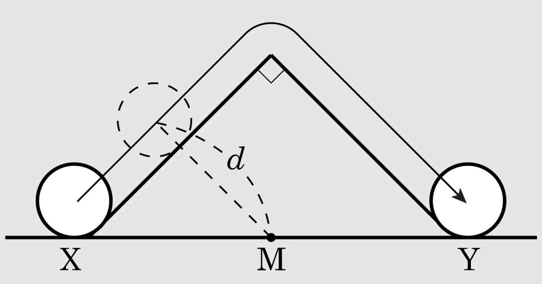
②


③


④


⑤


해설



따라서 d를 t의 함수로 나타낸 그래프는