1. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 16의 제곱근은 4이다.

㉡ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다.

㉢ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수) 에 대하여 $z + \bar{z}$ 는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

㉣ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수) 에 대하여 $z\bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

㉤ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수) 에 대하여 $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 제곱해서 16 이 되는 수 $4, -4$ $\therefore$ 거짓
㉡ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. $\therefore$ 참
㉢ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ $\therefore$ 참
㉣ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ $\therefore$ 참
㉤ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0$ $\therefore$ $z = a = \bar{z}$ $\therefore$ 참

2. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$ 는 각각 $\alpha,\ \beta$ 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면, $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

① ㉡,㉢ ② ㉠,㉡,㉢ ③ ㉠,㉡,㉣
④ ㉠,㉡ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha = a + bi,\ \beta = a - bi$ ($a,\ b$ 는 실수)
㉠ $\alpha + \beta = 2a,\ \alpha\beta = a^2 + b^2$
㉡ $\alpha\beta = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, $a = 0,\ b = 0$
㉢ (반례) $\alpha = 1,\ \beta = i$
㉣ (반례) $\alpha = 1,\ \beta = i$

3. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠　② ㉠ ,㉡　③ ㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉢　⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢

해설

$\alpha = a + bi \Rightarrow \overline{\beta} = a + bi$
㉠ $\alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2 + b^2 =$ 실수
㉡ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$
$\therefore \alpha = 0$ (T)
㉢ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

4. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음<보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z+\bar{z}$ 는 실수이다.	㉡ $z\bar{z} > 0$
㉢ $z-\bar{z}$ 는 허수이다.	㉣ $z^2+\bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉢　　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi,\ \bar{z} = a - bi,\ (a,\ b$ 는 실수$)$
㉠ $z+\bar{z} = 2a$(실수)
㉡ $z\bar{z} = a^2 + b^2 > 0$
㉢ $z-\bar{z} = 2bi$, $b = 0$ 일 경우에는 0 이다.
즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는 실수이다.
$ex)\ z = 3,\ \bar{z} = 3,\ z-\bar{z} = 3-3 = 0$
㉣ $z^2+\bar{z}^2 = 2(a^2-b^2)$ → 우변이 0보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

5. 복소수 α, β 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$(단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$

⑤ $\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha = 2,\ \overline{\alpha} = 2$

6. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $z+\bar{z}$ 는 실수이다.
② $z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.
③ $z\bar{z}=1$ 이면 $z^2=1$ 이다.
④ $z\bar{z}=0$ 이면 $z=0$ 이다.
⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각
$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ (a, b 는 실수) 라 하면
① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (참)
② $z=\bar{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi$
$\Leftrightarrow 2bi=0$
$\Leftrightarrow b=0$(참)
③ $z\bar{z}=a^2+b^2=1 \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi \neq 1$ (거짓)
(반례) $a=0,\ b=1$ 일 때, $z^2=-1$
④ $z\bar{z}=a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$ (참)
⑤ $z\bar{z}=a^2+b^2$ (참)

7. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ n이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.

Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$

Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.

Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ　　② Ⅰ, Ⅲ　　③ Ⅱ, Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅳ　　⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$

$= a + 1 - (2 - a)$

$= 2a - 1 \neq 3$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0$, $a \geq 0$ 이다.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)}i$

$= \sqrt{a(-b)}i = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$

$\therefore$ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

8. α, β 의 켤레복소수를 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라고 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\overline{\alpha-\beta i}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}i$

㉡ $\overline{\alpha+\beta-1}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha}^2+\alpha^2\overline{\alpha}$ 는 실수이다.

㉣ $\alpha\overline{\beta}=1$ 일 때, $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}+\dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$ 는 실수이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉢　　③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, $\overline{\alpha}=a-bi$, $\overline{\beta}=c-di$ 라 하면

㉠ $\overline{\alpha-\beta i}=\overline{a+bi-(c+di)i}$
$=\overline{a+bi-ci-di^2}$
$=a+d-(b-c)i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}i=(a-bi)-(c-di)i$
$=a-bi-ci+di^2$
$=a-d-(b+c)i$이므로 ㉠은 거짓

㉡ $\overline{\alpha+\beta-1}=\overline{a+bi+c+di-1}$
$=\overline{(a+c-1)+(b+d)i}$
$=(a+c-1)-(b+d)i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1=a-bi+c-di+1$
$=(a+c+1)-(b+d)i$이므로

㉡은 거짓

9. 다음은 두 복소수 z_1, z_2에 대하여 '$z_1 \cdot z_2 = 0$이면 $z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$'임을 보인 것이다.

$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 실수) 라고 하자.
$z_1 z_2 = 0$이면 $(a+bi)(c+di) = 0$
이 식의 양변에 $(a-bi)(c-di)$를 곱하면
(좌변) $= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di)$
$= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$
$= (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
(우변) $= 0 \cdot (a-bi)(c-di) = 0$
$\therefore\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0$
따라서 $a^2+b^2 = 0$ 또는 $c^2+d^2 = 0$이므로
$a = b = 0$ 또는 $c = d = 0$
$\therefore\ z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$

다음 중 위의 과정에 이용되지 <u>않는</u> 성질은?

① 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$이면 $x = y = 0$이다.

② 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $xy = 0$이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다.

③ 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $x + yi = 0$이면 $x = y = 0$이다.

④ 임의의 복소수 α에 대하여 $0 \cdot \alpha = 0$이다.

⑤ 복소수 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $\alpha\beta = \beta\alpha$이다.

해설

$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$ ($a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수)라고 하자.
$z_1 z_2 = 0$이면 $(a+bi)(c+di) = 0$
(좌변) $= (a+bi)(c+di)(a-bi)(c-di) \cdots$ ⑤
$= (a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$
$= (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
(우변) $= 0 \cdot (a-bi)(c-di) = 0 \cdots$ ④
$\therefore\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0 \cdots$ ②
따라서 $a^2+b^2 = 0$ 또는 $c^2+d^2 = 0$ 이므로 $\cdots$ ①
$a = b = 0$ 또는 $c = d = 0 \cdots$ ③의 역
$\therefore\ a + bi = 0$ 또는 $c + di = 0$
즉, 이 과정에서 ③의 역은 이용되었지만, ③은 이용되지 않았다.

10. 복소수 $w = 2 - i$ 에 대하여 $\dfrac{w}{w+1} + \dfrac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$ 의 값은? (단, $\overline{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① $\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{7}{5}$ ③ 1 ④ $\dfrac{7}{10}$ ⑤ $\dfrac{9}{10}$

해설

$\overline{w} = 2 + i$

$$\frac{w}{w+1} + \frac{\overline{w}}{\overline{w}+1}$$
$$= \frac{2-i}{3-i} + \frac{2+i}{3+i}$$
$$= \frac{(2-i)(3+i) + (2+i)(3-i)}{(3-i)(3+i)}$$
$$= \frac{14}{10}$$
$$= \frac{7}{5}$$

해설

$\omega + \overline{\omega} = 4, \omega\overline{\omega} = 5$

$$\begin{aligned} \frac{w}{w+1} + \frac{\overline{w}}{\overline{w}+1} &= \frac{2\omega\overline{\omega} + \omega + \overline{\omega}}{\omega\overline{\omega} + \omega + \overline{\omega} + 1} \\ &= \frac{10+4}{5+4+1} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

11. $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}i}{2}$ 에 대하여 복소수 $w=\frac{z+1}{3z-2}$ 일 때, $w\overline{w}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$z+\overline{z}=1,\ z\overline{z}=2$

$$\begin{aligned} w\overline{w} &= \frac{z+1}{3z-2}\times\frac{\overline{z}+1}{3\overline{z}-2} \\ &= \frac{z\overline{z}+(z+\overline{z})+1}{9z\overline{z}-6(z+\overline{z})+4} \\ &= \frac{2+1+1}{18-6+4} \\ &= \frac{4}{16} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

12. $\overline{z-zi}=1-i$ 를 성립시키는 복소수 z 은?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $-i$　　② 0　　③ i

④ $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$　　⑤ $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

해설

$$\begin{aligned}\overline{z-zi} &= \overline{z(1-i)} \\ &= \bar{z}\cdot\overline{1-i} \\ &= \bar{z}(1+i) \\ \bar{z}(1+i) &= (1-i)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \bar{z}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$$

$$\therefore\ z=i$$

13. $\alpha=1-i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha}^2+\alpha^2\overline{\alpha}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $-2i$　　② 2　　③ $2i$
④ 4　　⑤ $2+3i$

해설
$\alpha=1-i$, $\overline{\alpha}=1+i$
$\alpha+\overline{\alpha}=2, \alpha\overline{\alpha}=2$
$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}^2+\alpha^2\overline{\alpha}&=\alpha\overline{\alpha}(\alpha+\overline{\alpha})\\&=2\cdot 2\\&=4\end{aligned}$$

14. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 의 곱 $z\bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

① $-y$　　② $-x$　　③ x　　④ y　　⑤ 0

해설

$z\bar{z} = 1$ 에서 $\frac{1}{z} = \bar{z} = x - yi$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}\{(x + yi) + (x - yi)\} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \\ &= x\end{aligned}$$

15. $z=1+i$ 일 때, $\frac{\bar{z}-1}{z}-\frac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값을 구하면?

① $-i$　② i　③ $-2i$　④ $2i$　⑤ $3i$

해설

$\bar{z}=1-i$

$$\frac{\bar{z}-1}{z}-\frac{z-1}{\bar{z}}=\frac{-i}{1+i}-\frac{i}{1-i}$$
$$=-\frac{2i}{(1+i)(1-i)}$$
$$=-i$$

16. $\alpha = 1+i$ 일 때, $\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\overline{a}+1}\right)}$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\frac{i}{3}$ ② i ③ $-i$ ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\overline{\alpha} = 1-i$ 를 대입하면

$$\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\overline{a}+1}\right)} = \overline{\left\{\frac{1-(1+i)}{(1+i)(1-i)+1}\right\}} = \overline{\left(\frac{-i}{3}\right)} = \frac{i}{3}$$

17. 복소수 z 에 대하여 $3z+\bar{z}(1+i)=3-i$ 가 성립할 때, $z\bar{z}$ 의 값은?

① -3 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$
이것을 주어진 식에 대입하면
$3(a+bi)+(a-bi)(1+i)=3-i$
$3a+3bi+a+ai-bi+b=3-i$
$(4a+b)+(a+2b)i=3-i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $4a+b=3$, $a+2b=-1$

$$\begin{cases} 4a+b=3 & \cdots ㉠ \\ a+2b=-1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 에서

㉠ $\times 2-$ ㉡ 을 하면 $7a=7$,
$\therefore\ a=1$
$a=1$ 을 ㉠에 대입하면 $b=-1$
따라서 $z=a+bi=1-i$ 이므로 $z\bar{z}=(1-i)(1+i)=2$

18. 두 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때, $\overline{\alpha}+\beta$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① 2008　　② -2008

③ $2008i$　　④ $-2008i$

⑤ 일정하지 않다.

해설

켤레복소수의 성질에서

$\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때

$\overline{\alpha+\overline{\beta}}=\overline{2008i}$

$\overline{\alpha}+\beta=-2008i$

19. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\overline{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi},\ \overline{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \overline{w} &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1 \end{aligned}$$

20. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha + \beta) - \alpha\beta$ 라 하자. $z = \dfrac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

① -1　② 1　③ -9　④ 9　⑤ 0

해설

$z = -2 + i$, $\bar{z} = -2 - i$

$$\begin{aligned} z * \bar{z} &= (z + \bar{z}) - z\bar{z} \\ &= -4 - 5 \\ &= -9 \end{aligned}$$

21. 실수 k 에 대하여 $\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k-2}} = -\sqrt{\frac{k-1}{k-2}}$ 이 성립할 때, $|k-3|+|k-1|$ 을 간단히 하면?

① -2　　② 4　　③ 2
④ $|2k-4|$　　⑤ $|-2k-2|$

해설
$k-1 \geq 0,\ k-2 < 0$
$1 \leq k < 2$
$|k-3|+|k-1| = -(k-3)+(k-1) = 2$

22. $a<0,\ b<0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b} = -a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

④ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

해설

$a=-\alpha,\ b=-\beta(\alpha>0,\ \beta>0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b} = \sqrt{\alpha^2(-\beta)} = \alpha\sqrt{-\beta} = -a\sqrt{b}$

② $$\begin{aligned}\sqrt{a^3b} &= \sqrt{(\alpha)^3(-\beta)} \\ &= \alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)} \\ &= -a\sqrt{ab}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} &= \sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta} \\ &= \sqrt{\alpha}i\cdot\sqrt{\beta}i \\ &= \sqrt{\alpha\beta}i^2 \\ &= -\sqrt{\alpha\beta} \\ &= -\sqrt{ab}\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} &= \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}} \\ &= \frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i} \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2} = \alpha\beta = ab$

23. 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = \sqrt{10}$	㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = -6$
㉢ $(-\sqrt{-2})^2 = -2$	㉣ $(\sqrt{-3})^3 = -3\sqrt{3}i$
㉤ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = -2i$	㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = -2$

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

㉢, ㉣, ㉤이 옳다.

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5} = -\sqrt{10}$

㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12} = 6i$

㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = 2i$

24. 다음 식에서 등호가 처음 잘못 사용된 부분을 고르면?

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = -i$$

① $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$ ② $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ ③ $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}$
④ $\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i}$ ⑤ $\frac{i^2}{i} = -i$

해설

$a > 0,\ b < 0$ 일 때 $\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

예를들면, $i = \sqrt{\frac{1}{-1}} \neq \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = -i$

25. 두 실수 $x,\ y$가 $x+y=-5,\ xy=2$를 만족할 때, $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x+y=-5,\ xy=2$에서 $x<0,\ y<0$이다.

$$\therefore \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$
$$=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}$$
$$=\frac{-5}{-\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

26. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a+bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$\sqrt{-3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{-2}-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=(\sqrt{-3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{-2})-\dfrac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

$=\sqrt{-6}\times\sqrt{-6}-\sqrt{-2}-\sqrt{-2}$

$=-\sqrt{36}-\sqrt{2}i-\sqrt{2}i=-6-2\sqrt{2}i$

$\therefore\ ab=12\sqrt{2}$

27. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} + \sqrt{-3}\sqrt{-12}$ 를 바르게 계산한 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -8　　② $-8i$　　③ $8i$

④ $6+2i$　　⑤ $-6-2i$

해설

준 식$= \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}i} + \sqrt{3}i \times \sqrt{12}i = \dfrac{2}{i} + 6i^2 = -2i - 6$

28. $\sqrt{-2}\sqrt{-2}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{4}\sqrt{-4}+\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$ 를 간단히 하면?

① $1+4i$ ② $2+4i$ ③ $-2+4i$

④ $-2+i$ ⑤ $-2-4i$

해설

$$\sqrt{-2}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}}+\sqrt{4}\sqrt{-4}+\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{2}i+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}+2\cdot 2i+\frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{5}}=-2-i+4i+i=-2+4i$$

29. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} + \sqrt{-18} \div \sqrt{-6}$ 을 간단히 하면?

① $-3\sqrt{3}$　　② $-2\sqrt{3}$　　③ $-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$　　⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \sqrt{3}i \times 2i + \sqrt{18}i \times \frac{1}{\sqrt{6}i}$$
$$= -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}$$

30. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$
$$= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$
$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$
$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$
$$= -3 + 3i$$

31. $a<0$, $b<0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

② $\dfrac{\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}i$

해설

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$
$=(-a)(-b)=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{-a}\sqrt{b}$
$=\sqrt{(-1)a}\sqrt{b}$
$=-\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}$
$=-\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$

32. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$ ② $a(a-1)$ ③ $a^2(a-1)$
④ $a^2(1-a)^2$ ⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$a > 0$, $a-1 < 0$, $1-a > 0$, $-a < 0$ 이므로 $\sqrt{a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}\sqrt{-a}$
$= \sqrt{a}\sqrt{-a}\sqrt{a-1}\sqrt{1-a}$
$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}i \cdot \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}i$
$= \sqrt{a^2}\sqrt{(1-a)^2}i^2$
$= -a(1-a) = a(a-1)$

33. 실수 a 에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{a-1} = -\sqrt{a(a-1)}$, $\sqrt{\dfrac{b}{b-1}} = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b-1}}$ 일 때, $|a| + |b-1| + |a-b|$ 의 값을 구하면?

① -2 ② 1 ③ $-2a+1$

④ $-2b-1$ ⑤ $-2a-2b-1$

해설

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a-1} = -\sqrt{a(a-1)}$ 이므로
$a \le 0, a-1 \le 0$ 이다.

$\therefore\ a \le 0,\ \sqrt{\dfrac{b}{b-1}} = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b-1}}$ 이므로 $b-1 < 0, b \ge 0$ 이다.

$\therefore 0 \le b < 1$

$\therefore\ a - b \le 0$

$$\begin{aligned} \therefore\ |a| + |b-1| + |a-b| &= -a - (b-1) - (a-b) \\ &= -2a+1 \end{aligned}$$

34. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다

㉠ $z+\bar{z}$	㉡ $z\bar{z}$	㉢ $(z-\bar{z})^2$
㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}$	㉤ $\frac{\bar{z}}{z}$	

① ㉠
② ㉠ ,㉡
③ ㉠ ,㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣
⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣ ,㉤

해설

$z=a+bi$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\bar{z}=a-bi$

㉠ $z+\bar{z}=2a$

㉡ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

㉢ $(z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$

㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}-\frac{a+bi}{a^2+b^2}=\frac{-2bi}{a^2+b^2}$

㉤ $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}$

35. 복소수 $z = a + bi,\ w = b + ai$ ($a,\ b$는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i = \sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $\overline{z},\ \overline{w}$ 는 각각 $z,\ w$ 의 켤레복소수이다.)

① $i\overline{z} = w$

② $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}} = \dfrac{z}{w}$

③ $z \cdot \overline{w} = \overline{z} \cdot w$

④ $z \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w}$

⑤ $i(\overline{z} + \overline{w}) = z + w$

해설

① : $i\overline{z} = i(a - bi) = b + ai = w$

② :①에서 $\overline{z} = -iw$ …… ㉠

같은 방법으로 $\overline{w} = -iz$ …… ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\dfrac{\overline{w}}{\overline{z}} = \dfrac{-iz}{-iw} = \dfrac{z}{w}$

③ :㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $= z \cdot (-iz) = -iz^2$,

(우변) $= (-iw) \cdot w = -iw^2$

$\therefore$ 좌변$\neq$우변

④ : ②에서 $z \cdot \overline{z} = w \cdot \overline{w}$

⑤ : $i(\overline{z} + \overline{w}) = i\overline{z} + i\overline{w} = w + z = z + w$

36. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha + \overline{\alpha}$ 는 실수이다.
>
> ㉡ $\alpha - \overline{\alpha}$ 는 허수이다.
>
> ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
>
> ㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉣　⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha + \overline{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \overline{\alpha} = 0$ 이다.
따라서 $\alpha - \overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣
$$\begin{aligned}\overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \overline{\alpha} + \overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

37. x, y 가 실수일 때, 복소수 $z=x+yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z}=3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z+\frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x　　② y　　③ $x+y$
④ $x-y$　　⑤ $2x+y$

해설

$z=x+yi$, $\bar{z}=x-yi$ 이므로

$z\cdot\bar{z}=3$ 이면 $\bar{z}=\frac{3}{z}$ 을 대입

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(z+\frac{3}{z}\right)&=\frac{1}{2}(z+\bar{z})\\&=\frac{1}{2}(x+yi+x-yi)\\&=x\end{aligned}$$

38. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x+y=2+3i$ 라 할 때, $x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$ 의 값은?

① 13　　② $11+2i$　　③ 12
④ $12-i$　　⑤ 11

해설

$x+y=2+3i$, $\overline{x}+\overline{y}=2-3i$
$x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$
$=x(\overline{x}+\overline{y})+y(\overline{x}+\overline{y}))$
$=(x+y)(\overline{x}+\overline{y})$
$=(2+3i)(2-3i)$
$=13$

39. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5$, $\bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

40. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$　　② $-y$　　③ $2x$　　④ $\frac{-x}{2}$　　⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$

$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

41. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + \sqrt[3]{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$를 간단히 하면?

① $x-1$　　② $-x+1$　　③ $2y-3x+1$

④ $3x-2y-1$　　⑤ $-3x-2y-1$

해설

$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ 일 때, $y \geq 0,\ x < 0$

(준식) $= |y-x+1| + \sqrt[3]{(x-y)^3} + |x|$

$= y-x+1+x-y-x = -x+1$

42. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2 \ \cdots\cdots\ a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음<보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1　　㉡ -1　　㉢ i　　㉣ $-i$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1 a_2 \ \cdots\cdots\ a_{10} = 1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$
$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k+2} = \sqrt{1}\cdot i^2 = -1$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$
$= \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_{10}}\ i^{4k}$
$= 1$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.