

1. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ㉠ 16의 제곱근은 4이다.
- ㉡ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다.
- ㉢ 복소수 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)에 대하여 $z + \bar{z}$ 는 실수이다. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)
- ㉣ 복소수 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)에 대하여 $z\bar{z}$ 는 실수이다. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)
- ㉤ 복소수 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)에 대하여 $z = \bar{z}$ 이면 z 는 실수이다. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

㉠ 제곱해서 16이 되는 수 4, -4 $\therefore$ 거짓

㉡ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. $\therefore$ 참

㉢ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a \therefore$ 참

㉣ $z\bar{z} = a^2 + b^2 \therefore$ 참

㉤ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0 \therefore z = a = \bar{z} \therefore$ 참

2. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 이면, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

㉤ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

① ㉡, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$\alpha = a + bi, \beta = a - bi$ (a, b 는 실수)

㉠ $\alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = a^2 + b^2$

㉡ $\alpha\beta = 0, a^2 + b^2 = 0, a = 0, b = 0$

㉢ (반례) $\alpha = 1, \beta = i$

㉤ (반례) $\alpha = 1, \beta = i$

3. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$$\alpha = a + bi \Rightarrow \bar{\beta} = a + bi$$

㉠ $\alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2 + b^2 =$ 실수

㉡ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$

$\therefore \alpha = 0$ (T)

㉢ 반례: $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

4. 복소수 z 의 켈레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z + \bar{z}$ 는 실수이다.

㉡ $z\bar{z} > 0$

㉢ $z - \bar{z}$ 는 허수이다.

㉣ $z^2 + \bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉠, ㉣

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi, (a, b \text{ 는 실수})$

㉠ $z + \bar{z} = 2a$ (실수)

㉡ $z\bar{z} = a^2 + b^2 > 0$

㉢ $z - \bar{z} = 2bi, b = 0$ 일 경우에는 0 이다.

즉, z 가 실수부만으로 이루어져 있는 경우에는 실수이다.

ex) $z = 3, \bar{z} = 3, z - \bar{z} = 3 - 3 = 0$

㉣ $z^2 + \bar{z}^2 = 2(a^2 - b^2) \rightarrow$ 우변이 0보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

5. 복소수 α, β 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

② $\overline{\alpha^n} = (\bar{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ (단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\bar{\alpha})} = \alpha$

⑤ $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha = 2, \bar{\alpha} = 2$

6. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $z + \bar{z}$ 는 실수이다.

② $z = \bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.

③ $z\bar{z} = 1$ 이면 $z^2 = 1$ 이다.

④ $z\bar{z} = 0$ 이면 $z = 0$ 이다.

⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ (a, b 는 실수)라 하면

① $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (참)

② $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi$

$$\Leftrightarrow 2bi = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0 \text{ (참)}$$

③ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \neq 1$ (거짓)

(반례) $a = 0$, $b = 1$ 일 때, $z^2 = -1$

④ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $b = 0$ (참)

⑤ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (참)

7. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

I n 이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$ 은 실수이다.

II $-1 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$

III $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 이다.

IV $0 < a < b$ 일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① I, II

② I, III

③ II, III

④ I, IV

⑤ II, III, IV

해설

I. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in \mathbb{R}$ (참)

II. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$
 $= a+1 - (2-a)$
 $= 2a-1 \neq 3$

III. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $b < 0, a \geq 0$ 이다.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)i}$
 $= \sqrt{a(-b)i} = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$

$\therefore \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

IV. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

8. α, β 의 켈레복소수를 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 라고 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\overline{\alpha - \beta i} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}i$

㉡ $\overline{\alpha + \beta - 1} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + 1$

㉢ $\alpha \bar{\alpha}^2 + \alpha^2 \bar{\alpha}$ 는 실수이다.

㉤ $\alpha \bar{\beta} = 1$ 일 때, $\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} + \frac{\bar{\beta}}{\beta}$ 는 실수이다.

① ㉠

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉤

④ ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉤

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di, \bar{\alpha} = a - bi, \bar{\beta} = c - di$ 라 하면

$$\begin{aligned} \text{㉠ } \overline{\alpha - \beta i} &= \overline{a + bi - (c + di)i} \\ &= \overline{a + bi - ci - di^2} \\ &= \overline{a + d - (b - c)i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} - \bar{\beta}i &= (a - bi) - (c - di)i \\ &= a - bi - ci + di^2 \\ &= a - d - (b + c)i \end{aligned} \text{이므로 ㉠은 거짓}$$

$$\begin{aligned} \text{㉡ } \overline{\alpha + \beta - 1} &= \overline{a + bi + c + di - 1} \\ &= \overline{(a + c - 1) + (b + d)i} \\ &= (a + c - 1) - (b + d)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} + \bar{\beta} + 1 &= a - bi + c - di + 1 \\ &= (a + c + 1) - (b + d)i \end{aligned} \text{이므로}$$

㉡은 거짓

9. 다음은 두 복소수 z_1, z_2 에 대하여 ' $z_1 \cdot z_2 = 0$ 이면 $z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$ '임을 보인 것이다.

$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ (a, b, c, d 는 실수) 라고 하자.

$z_1 z_2 = 0$ 이면 $(a + bi)(c + di) = 0$

이 식의 양변에 $(a - bi)(c - di)$ 를 곱하면

(좌변) $= (a + bi)(c + di)(a - bi)(c - di)$

$= (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di)$

$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

(우변) $= 0 \cdot (a - bi)(c - di) = 0$

$\therefore (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 0$

따라서 $a^2 + b^2 = 0$ 또는 $c^2 + d^2 = 0$ 이므로

$a = b = 0$ 또는 $c = d = 0$

$\therefore z_1 = 0$ 또는 $z_2 = 0$

다음 중 위의 과정에 이용되지 않는 성질은?

- ① 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 0$ 이면 $x = y = 0$ 이다.
- ② 두 실수 x, y 에 대하여 $xy = 0$ 이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$ 이다.
- ③ 두 실수 x, y 에 대하여 $x + yi = 0$ 이면 $x = y = 0$ 이다.
- ④ 임의의 복소수 α 에 대하여 $0 \cdot \alpha = 0$ 이다.
- ⑤ 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha\beta = \beta\alpha$ 이다.

해설

$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라고 하자.

$z_1 z_2 = 0$ 이면 $(a + bi)(c + di) = 0$

(좌변) $= (a + bi)(c + di)(a - bi)(c - di) \cdots$ ⑤

$= (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di)$

$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

(우변) $= 0 \cdot (a - bi)(c - di) = 0 \cdots$ ④

$\therefore (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 0 \cdots$ ②

따라서 $a^2 + b^2 = 0$ 또는 $c^2 + d^2 = 0$ 이므로 $\cdots$ ①

$a = b = 0$ 또는 $c = d = 0 \cdots$ ③의 역

$\therefore a + bi = 0$ 또는 $c + di = 0$

즉, 이 과정에서 ③의 역은 이용되었지만, ③은 이용되지 않았다.

10. 복소수 $w = 2 - i$ 에 대하여 $\frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1}$ 의 값은? (단, $\bar{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① $\frac{3}{5}$

② $\frac{7}{5}$

③ 1

④ $\frac{7}{10}$

⑤ $\frac{9}{10}$

해설

$$\bar{w} = 2 + i$$

$$\frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1}$$

$$= \frac{2-i}{3-i} + \frac{2+i}{3+i}$$

$$= \frac{(2-i)(3+i) + (2+i)(3-i)}{(3-i)(3+i)}$$

$$= \frac{14}{10}$$

$$= \frac{7}{5}$$

해설

$$\omega + \bar{\omega} = 4, \omega\bar{\omega} = 5$$

$$\begin{aligned} \frac{w}{w+1} + \frac{\bar{w}}{\bar{w}+1} &= \frac{2\omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega}}{\omega\bar{\omega} + \omega + \bar{\omega} + 1} \\ &= \frac{5 + 4 + 1}{7} \\ &= \frac{10}{7} \end{aligned}$$

11. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}$ 에 대하여 복소수 $w = \frac{z+1}{3z-2}$ 일 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$z + \bar{z} = 1, z\bar{z} = 2$$

$$\begin{aligned} w\bar{w} &= \frac{z+1}{3z-2} \times \frac{\bar{z}+1}{3\bar{z}-2} \\ &= \frac{z\bar{z} + (z + \bar{z}) + 1}{9z\bar{z} - 6(z + \bar{z}) + 4} \\ &= \frac{2 + 1 + 1}{18 - 6 + 4} \\ &= \frac{4}{16} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

12. $\overline{z - zi} = 1 - i$ 를 성립시키는 복소수 z 은?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $-i$

② 0

③ i

④ $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

⑤ $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

해설

$$\overline{z - zi} = \overline{z(1 - i)}$$

$$= \bar{z} \cdot \overline{1 - i}$$

$$= \bar{z}(1 + i)$$

$$\bar{z}(1 + i) = (1 - i)$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = -i$$

$$\therefore z = i$$

13. $\alpha = 1 - i$ 일 때, $\alpha\bar{\alpha}^2 + \alpha^2\bar{\alpha}$ 의 값은?
(단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① $-2i$

② 2

③ $2i$

④ 4

⑤ $2 + 3i$

해설

$$\alpha = 1 - i, \bar{\alpha} = 1 + i$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2, \alpha\bar{\alpha} = 2$$

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha}^2 + \alpha^2\bar{\alpha} &= \alpha\bar{\alpha}(\alpha + \bar{\alpha}) \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4\end{aligned}$$

14. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 의 곱 $z\bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ 을 간단히 하면?

① $-y$

② $-x$

③ x

④ y

⑤ 0

해설

$$z\bar{z} = 1 \text{ 에서 } \frac{1}{z} = \bar{z} = x - yi$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) &= \frac{1}{2} \{ (x + yi) + (x - yi) \} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \\ &= x \end{aligned}$$

15. $z = 1 + i$ 일 때, $\frac{\bar{z}-1}{z} - \frac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값을 구하면?

①

$-i$

② i

③ $-2i$

④ $2i$

⑤ $3i$

해설

$$\bar{z} = 1 - i$$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{z}-1}{z} - \frac{z-1}{\bar{z}} &= \frac{-i}{1+i} - \frac{i}{1-i} \\ &= -\frac{2i}{(1+i)(1-i)} \\ &= -i\end{aligned}$$

16. $\alpha = 1+i$ 일 때, $\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\bar{a}+1}\right)}$ 의 값은? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\frac{i}{3}$

② i

③ $-i$

④ $1+i$

⑤ $1-i$

해설

$\alpha = 1+i$, $\bar{\alpha} = 1-i$ 를 대입하면

$$\overline{\left(\frac{1-\alpha}{a\bar{a}+1}\right)} = \overline{\left\{\frac{1-(1+i)}{(1+i)(1-i)+1}\right\}} = \overline{\left(\frac{-i}{3}\right)} = \frac{i}{3}$$

17. 복소수 z 에 대하여 $3z + \bar{z}(1+i) = 3-i$ 가 성립할 때, $z\bar{z}$ 의 값은?

- ① -3 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 2 ⑤ 4

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$3(a + bi) + (a - bi)(1 + i) = 3 - i$$

$$3a + 3bi + a + ai - bi + b = 3 - i$$

$$(4a + b) + (a + 2b)i = 3 - i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $4a + b = 3$, $a + 2b = -1$

$$\begin{cases} 4a + b = 3 & \cdots \textcircled{㉠} \\ a + 2b = -1 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases} \text{에서}$$

$\textcircled{㉠} \times 2 - \textcircled{㉡}$ 을 하면 $7a = 7$,

$$\therefore a = 1$$

$a = 1$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $b = -1$

따라서 $z = a + bi = 1 - i$ 이므로 $z\bar{z} = (1 - i)(1 + i) = 2$

18. 두 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha + \bar{\beta} = 2008i$ 일 때, $\bar{\alpha} + \beta$ 의 값은? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 2008

② -2008

③ $2008i$

④ $-2008i$

⑤ 일정하지 않다.

해설

켤레복소수의 성질에서

$$\alpha + \bar{\beta} = 2008i \text{ 일 때}$$

$$\overline{\alpha + \bar{\beta}} = \overline{2008i}$$

$$\bar{\alpha} + \beta = -2008i$$

19. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1 + bi}{1 + bi}, \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1 + bi}{1 + bi}\right)} = \frac{-1 - bi}{1 - bi}$$

$$\begin{aligned}\therefore w\bar{w} &= \frac{-1 + bi}{1 + bi} \cdot \frac{-1 - bi}{1 - bi} \\ &= \frac{-1 + bi}{1 + bi} \cdot \frac{-(1 + bi)}{-(-1 + bi)} \\ &= \frac{-1 + bi}{1 + bi} \cdot \frac{1 + bi}{-1 + bi} = 1\end{aligned}$$

20. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha + \beta) - \alpha\beta$ 라 하자. $z = \frac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

① -1

② 1

③ -9

④ 9

⑤ 0

해설

$$z = -2 + i, \bar{z} = -2 - i$$

$$z * \bar{z} = (z + \bar{z}) - z\bar{z}$$

$$= -4 - 5$$

$$= -9$$

21. 실수 k 에 대하여 $\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k-2}} = -\sqrt{\frac{k-1}{k-2}}$ 이 성립할 때, $|k-3| + |k-1|$ 을 간단히 하면?

① -2

② 4

③ 2

④ $|2k-4|$

⑤ $|-2k-2|$

해설

$$k-1 \geq 0, k-2 < 0$$

$$1 \leq k < 2$$

$$|k-3| + |k-1| = -(k-3) + (k-1) = 2$$

22. $a < 0, b < 0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 않는 것은?

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b} = -a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

④ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

해설

$a = -\alpha, b = -\beta (\alpha > 0, \beta > 0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b} = \sqrt{\alpha^2(-\beta)} = \alpha\sqrt{-\beta} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b} = \sqrt{(\alpha)^3(-\beta)}$
 $= \alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}$
 $= -a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{-\alpha} \sqrt{-\beta}$
 $= \sqrt{\alpha}i \cdot \sqrt{\beta}i$
 $= \sqrt{\alpha\beta}i^2$
 $= -\sqrt{\alpha\beta}$
 $= -\sqrt{ab}$

④ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}}$
 $= \frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i}$
 $= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$
 $= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$
 $= \sqrt{\frac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2} = \alpha\beta = ab$

23. 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

$$\textcircled{\text{㉠}} \sqrt{-2} \sqrt{-5} = \sqrt{10}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \sqrt{-3} \sqrt{12} = -6$$

$$\textcircled{\text{㉢}} (-\sqrt{-2})^2 = -2$$

$$\textcircled{\text{㉣}} (\sqrt{-3})^3 = -3\sqrt{3}i$$

$$\textcircled{\text{㉤}} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = -2i$$

$$\textcircled{\text{㉥}} \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = -2$$

① 2 개

② 3 개

③ 4 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

㉢, ㉣, ㉤이 옳다.

$$\textcircled{\text{㉠}} \sqrt{-2} \sqrt{-5} = -\sqrt{10}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \sqrt{-3} \sqrt{12} = 6i$$

$$\textcircled{\text{㉥}} \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} = 2i$$

24. 다음 식에서 등호가 처음 잘못 사용된 부분을 고르면?

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = -i$$

① $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$

② $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$

③ $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}$

④ $\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i}$

⑤ $\frac{i^2}{i} = -i$

해설

$a > 0, b < 0$ 일 때 $\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

예를들면, $i = \sqrt{\frac{1}{-1}} \neq \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = -i$

25. 두 실수 x, y 가 $x + y = -5$, $xy = 2$ 를 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x + y = -5$, $xy = 2$ 에서 $x < 0$, $y < 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \\ &= \frac{x+y}{-\sqrt{xy}} \\ &= \frac{-5}{-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

26. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a + bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}& \sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\&= (\sqrt{-3} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{-2}) - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\&= \sqrt{-6} \times \sqrt{-6} - \sqrt{-2} - \sqrt{-2} \\&= -\sqrt{36} - \sqrt{2}i - \sqrt{2}i = -6 - 2\sqrt{2}i \\&\therefore ab = 12\sqrt{2}\end{aligned}$$

27. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} + \sqrt{-3}\sqrt{-12}$ 를 바르게 계산한 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -8

② $-8i$

③ $8i$

④ $6 + 2i$

⑤ $-6 - 2i$

해설

$$\text{준 식} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}i} + \sqrt{3}i \times \sqrt{12}i = \frac{2}{i} + 6i^2 = -2i - 6$$

28. $\sqrt{-2}\sqrt{-2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{4}\sqrt{-4} + \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}}$ 를 간단히 하면?

① $1 + 4i$

② $2 + 4i$

③ $-2 + 4i$

④ $-2 + i$

⑤ $-2 - 4i$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-2}\sqrt{-2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{4}\sqrt{-4} + \frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{2}i \cdot \sqrt{2}i + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} + 2 \cdot 2i + \frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{5}} = -2 - i + 4i + i = -2 + 4i \end{aligned}$$

29. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} + \sqrt{-18} \div \sqrt{-6}$ 을 간단히 하면?

① $-3\sqrt{3}$

② $-2\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}$

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \sqrt{3}i \times 2i + \sqrt{18}i \times \frac{1}{\sqrt{6}i} \\ &= -2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

30. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▶ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}} \\ &= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}} \\ &= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9} \\ &= -\sqrt{9} + \sqrt{-9} \\ &= -3 + 3i \end{aligned}$$

31. $a < 0, b < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$

② $\frac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a}}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{bi}$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{bi}$

해설

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\frac{b^2}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$
 $= (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b}$
 $= \sqrt{(-1)a}\sqrt{b}$
 $= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}$
 $= -\sqrt{a}\sqrt{bi}$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

32. $0 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{a} \sqrt{a-1} \sqrt{1-a} \sqrt{-a}$ 를 간단히 하면?

① $a(1-a)$

② $a(a-1)$

③ $a^2(a-1)$

④ $a^2(1-a)^2$

⑤ $-a^2(1-a)^2$

해설

$$\begin{aligned} & a > 0, a-1 < 0, 1-a > 0, -a < 0 \text{ 이므로 } \sqrt{a} \sqrt{a-1} \sqrt{1-a} \sqrt{-a} \\ &= \sqrt{a} \sqrt{-a} \sqrt{a-1} \sqrt{1-a} \\ &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{ai} \cdot \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-ai} \\ &= \sqrt{a^2} \sqrt{(1-a)^2 i^2} \\ &= -a(1-a) = a(a-1) \end{aligned}$$

33. 실수 a 에 대하여 $\sqrt{a} \sqrt{a-1} = -\sqrt{a(a-1)}$, $\sqrt{\frac{b}{b-1}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b-1}}$ 일 때, $|a| + |b-1| + |a-b|$ 의 값을 구하면?

① -2

② 1

③ $-2a + 1$

④ $-2b - 1$

⑤ $-2a - 2b - 1$

해설

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a-1} = -\sqrt{a(a-1)}$ 이므로
 $a \leq 0, a-1 \leq 0$ 이다.

$\therefore a \leq 0, \sqrt{\frac{b}{b-1}} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b-1}}$ 이므로 $b-1 < 0, b \geq 0$ 이다.

$\therefore 0 \leq b < 1$

$\therefore a - b \leq 0$

$$\begin{aligned} \therefore |a| + |b-1| + |a-b| &= -a - (b-1) - (a-b) \\ &= -2a + 1 \end{aligned}$$

34. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다)

㉠ $z + \bar{z}$

㉡ $z\bar{z}$

㉢ $(z - \bar{z})^2$

㉤ $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}$

㉦ $\frac{\bar{z}}{z}$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉥, ㉦

해설

$$z = a + bi \text{ 라 하자 } \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$\text{㉠ } z + \bar{z} = 2a$$

$$\text{㉡ } z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$\text{㉢ } (z - \bar{z})^2 = (2bi)^2 = -4b^2$$

$$\text{㉤ } \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} - \frac{a + bi}{a^2 + b^2} = \frac{-2bi}{a^2 + b^2}$$

$$\text{㉦ } \frac{\bar{z}}{z} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2}$$

35. 복소수 $z = a + bi$, $w = b + ai$ (a, b 는 $ab \neq 0$ 인 실수, $i = \sqrt{-1}$)에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $\bar{z}$, $\bar{w}$ 는 각각 z , w 의 켤레복소수이다.)

① $i\bar{z} = w$

② $\frac{\bar{w}}{\bar{z}} = \frac{z}{w}$

③ $z \cdot \bar{w} = \bar{z} \cdot w$

④ $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w}$

⑤ $i(\bar{z} + \bar{w}) = z + w$

해설

① : $i\bar{z} = i(a - bi) = b + ai = w$

② : ①에서 $\bar{z} = -iw$ ㉠

같은 방법으로 $\bar{w} = -iz$ ㉡

㉠, ㉡을 대입하면 $\frac{\bar{w}}{\bar{z}} = \frac{-iz}{-iw} = \frac{z}{w}$

③ : ㉠, ㉡을 대입하면

(좌변) $= z \cdot (-iz) = -iz^2$,

(우변) $= (-iw) \cdot w = -iw^2$

$\therefore$ 좌변 $\neq$ 우변

④ : ②에서 $z \cdot \bar{z} = w \cdot \bar{w}$

⑤ : $i(\bar{z} + \bar{w}) = i\bar{z} + i\bar{w} = w + z = z + w$

36. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

- ㉠ $\alpha + \bar{\alpha}$ 는 실수이다.
 ㉡ $\alpha - \bar{\alpha}$ 는 허수이다.
 ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
 ㉣ $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉣

⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

㉠ $\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \bar{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \bar{\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha - \bar{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

$$\begin{aligned} \text{㉣ } \overline{\alpha + \beta} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \bar{\alpha} + \bar{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha\beta} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} \end{aligned}$$

$\therefore$ 참

37. x, y 가 실수일 때, 복소수 $z = x + yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z} = 3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x

② y

③ $x + y$

④ $x - y$

⑤ $2x + y$

해설

$$z = x + yi, \bar{z} = x - yi \text{ 이므로}$$

$$z \cdot \bar{z} = 3 \text{ 이면 } \bar{z} = \frac{3}{z} \text{ 을 대입}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(z + \frac{3}{z} \right) &= \frac{1}{2} (z + \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2} (x + yi + x - yi) \\ &= x \end{aligned}$$

38. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x + y = 2 + 3i$ 라 할 때, $x\bar{x} + x\bar{y} + \bar{x}y + y\bar{y}$ 의 값은?

①

13

② $11 + 2i$

③ 12

④ $12 - i$

⑤ 11

해설

$$x + y = 2 + 3i, \bar{x} + \bar{y} = 2 - 3i$$

$$x\bar{x} + x\bar{y} + \bar{x}y + y\bar{y}$$

$$= x(\bar{x} + \bar{y}) + y(\bar{x} + \bar{y})$$

$$= (x + y)(\bar{x} + \bar{y})$$

$$= (2 + 3i)(2 - 3i)$$

$$= 13$$

39. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right)$ 를 간단히 하면?

① b

② $2b$

③ 0

④ $5a$

⑤ a

해설

$$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

40. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$

② $-y$

③ $2x$

④ $\frac{-x}{2}$

⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{그러므로 } \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i &= \frac{1}{2} (z - \bar{z}) i \\ &= \frac{1}{2} (x + yi - x + yi) i \\ &= \frac{1}{2} (2yi) i = -y \end{aligned}$$

41. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 가 성립할 때,

$\sqrt{(y-x+1)^2} + {}^3\sqrt{x^3 - y^3 - 3xy(x-y)} + |x|$ 를 간단히 하면?

① $x - 1$

② $-x + 1$

③ $2y - 3x + 1$

④ $3x - 2y - 1$

⑤ $-3x - 2y - 1$

해설

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ 일 때, } y \geq 0, x < 0$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= |y - x + 1| + {}^3\sqrt{(x - y)^3} + |x| \\ &= y - x + 1 + x - y - x = -x + 1 \end{aligned}$$

42. $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1

㉡ -1

㉢ i

㉣ $-i$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 이면 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k + 2$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k+2} = \sqrt{1} \cdot i^2 = -1 \end{aligned}$$

ii) -1 이 $4k$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.