1. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을
y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$
즉, $x^2+y^2-ax+by=0$
이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
$-a=2-b,\ b=2a-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$
$\therefore\ a+b=6+8=14$

2. 두 점 $\mathrm{A}(-3,0)$, $\mathrm{B}(3,0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=20$을 만족시키는 점 P의 자취를 구하면?

① $x=1$ ② $x=2$ ③ $x^2+y^2=1$

④ $x^2+y^2=2$ ⑤ $x^2+y^2=4$

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P(x,y)}$ 라 하면

$(x+3)^3+y^2+(x-3)^2+y^2=20$

$2x^2+2y^2=2$

$\therefore x^2+y^2=1$

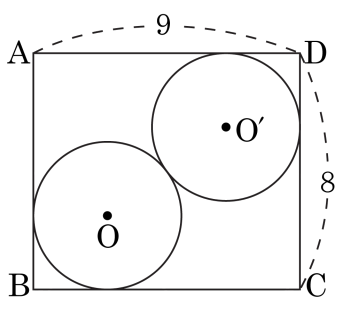
3. 평행이동 $(x,\ y) \to (x+2,\ y-3)$ 에 의하여 직선 $x+ay+b=0$ 이 직선 $x-2y+10=0$ 으로 옮겨졌다고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

평행이동 $(x,\ y) \to (x+2,\ y-3)$ 에 의하여
직선 $x+ay+b=0$ 은
$(x-2)+a(y+3)+b=0$ 으로 옮겨진다.
이 식을 정리하면 $x+ay+3a+b-2=0$ 이다.
이 식은 $x-2y+10=0$ 과 같은 식이므로
계수를 비교하면 $a=-2,\ 3a+b-2=10$
$\therefore\ a=-2,\ b=18 \quad \therefore\ a+b=16$

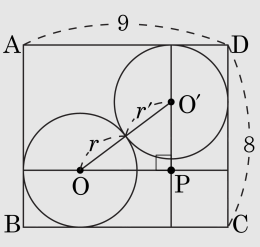
4. 다음 그림과 같이 직사각형 ABCD 안에 서로 외접하는 두 원 O, O′이 있다.



원 O는 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에 접하고 원 O′은 $\overline{CD}$, $\overline{DA}$에 접한다. 이 때, 두 원의 넓이의 합의 최솟값은? (단, $\overline{AD}=9$, $\overline{CD}=8$이다.)

① 11π ② $\frac{25}{2}\pi$ ③ 14π ④ $\frac{31}{2}\pi$ ⑤ 17π

해설



원 O, O′의 반지름을 각각 r, r'이라 하고 원의 중심 O, O′에서 각각 $\overline{AD}$, $\overline{AB}$에 평행한 선을 그어 교점을 P라 하면

$\overline{OO'}=r+r'$

$\overline{OP}=9-(r+r')$

$\overline{O'P}=8-(r+r')$이므로

$(r+r')^2=\{9-(r+r')\}^2+\{8-(r+r')\}^2$

정리하면

$(r+r'-5)(r+r'-29)=0$

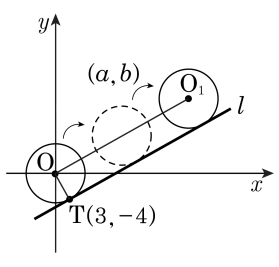
$r+r'\le 8$이므로 $r+r'=5$

$\therefore\ \pi r^2+\pi r'^2=\pi\{r^2+(5-r)^2\}$

$$=2\pi\left(r-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}\pi$$

따라서 $r=\frac{5}{2}$일 때, 최솟값은 $\frac{25}{2}\pi$이다

5. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 T(3, −4) 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O′ 의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 T(3, −4) 에서 원 O 와 접하므로
직선 OT 와 직선 l 은 수직이다.

이 때, 직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한 편, 원 O′ 의 중심이 (a, b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO′ 의 기울기와 같고,

직선 OO′ 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\therefore \frac{b}{a}$ = (직선 OO′ 의 기울기)= (직선 l 의 기울기)= $\frac{3}{4}$