1. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, $f(a) = a^2 - 2a + 2$ 의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 5

해설

x 축과 만나지 않으려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.
$\Rightarrow D = a^2 - 4 < 0$
$\therefore -2 < a < 2$
$f(a) = (a-1)^2 + 1$
$\therefore$ $a = 1$ 일 때, 최솟값 1

2. $x=1$ 일 때 최솟값 1 을 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y=a(x-1)^2+1$

$=a(x^2-2x+1)+1$

$=ax^2-2ax+a+1$

$a+1=2,\ a=1$

$y=(x-1)^2+1$

$p=1, q=1$

$\therefore apq=1$

3. 두 실수 $x,\ y$ 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$

$x^2+2x-3\leq 0,\ \ (x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

4. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α, β, γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3$,
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$,
$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$
따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0 \cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면
$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$
$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0 \cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α, β, γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$이다.
$\therefore$구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

5. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 16 인 직각삼각형의 넓이의 최댓값은?

① 18 ② 32 ③ 48 ④ 64 ⑤ 80

해설

직각을 낀 두변의 길이를 각각 $x,\ y$ 라 하면 $x+y=16$
이 때, $x>0,\ y>0$ 이므로 $y=16-x>0$ 에서 $0<x<16$
직각삼각형의 넓이는
$$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x(16-x)=-\frac{1}{2}x^2+8x=-\frac{1}{2}(x-8)^2+32$$
따라서 $0<x<16$ 이므로 $x=8$ 일 때 넓이의 최댓값은 32 이다.