

1. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, $f(a) = a^2 - 2a + 2$ 의 최솟값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 5

해설

x 축과 만나지 않으려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow D = a^2 - 4 < 0$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

$$f(a) = (a - 1)^2 + 1$$

$\therefore a = 1$ 일 때, 최솟값 1

2. $x = 1$ 일 때 최솟값 1 을 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x - p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$\begin{aligned}y &= a(x - 1)^2 + 1 \\&= a(x^2 - 2x + 1) + 1 \\&= ax^2 - 2ax + a + 1\end{aligned}$$

$$a + 1 = 2, a = 1$$

$$y = (x - 1)^2 + 1$$

$$p = 1, q = 1$$

$$\therefore apq = 1$$

3. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면
 $y^2 - 2y + (x^2 + 2x - 2) = 0$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (x^2 + 2x - 2) \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0, (x + 3)(x - 1) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq x \leq 1$, x 의 최댓값은 1, 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

4. $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, abc 의 값을 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0 \text{의}$$

세 근이 α, β, γ 이므로

$$\alpha + \beta + \gamma = -2,$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3,$$

$$\alpha\beta\gamma = -1$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 2,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -1$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 를 세 근으로 하는

삼차항의 계수가 1인 방정식은

$$x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$\therefore a = 3, b = 2, c = 1$$

해설

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x = \frac{1}{X}$ 로 놓으면

$$\left(\frac{1}{X}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{X}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{X}\right) + 1 = 0$$

$$\therefore X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①의 세 근이 α, β, γ 이므로

②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.

\therefore 구하는 방정식은

$$X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0 \text{에서}$$

$$abc = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

5. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 16 인 직각삼각형의 넓이의 최댓값은?

① 18

② 32

③ 48

④ 64

⑤ 80

해설

직각을 낀 두 변의 길이를 각각 x , y 라 하면 $x + y = 16$
이 때, $x > 0$, $y > 0$ 이므로 $y = 16 - x > 0$ 에서 $0 < x < 16$
직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(16 - x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8x = -\frac{1}{2}(x - 8)^2 + 32$$

따라서 $0 < x < 16$ 이므로 $x = 8$ 일 때 넓이의 최댓값은 32 이다.