1. 은정이는 5 회에 걸친 사회 시험에서 4 회까지 83 점, 84 점, 79 점, 90 점을 받았고, 5 회는 병결로 인해 4 회까지의 평균 성적의 50 % 를 받았다. 은정이의 5 회에 걸친 사회시험 성적의 평균은?

① 72 점 ② 73.2 점 ③ 75.6 점
④ 77.8 점 ⑤ 82 점

해설

4 회 까지의 평균 : $\frac{83+84+79+90}{4} = \frac{336}{4} = 84$(점)

5 회 성적 : $84 \times \frac{50}{100} = 42$(점)

(5 회에 걸친 사회 성적의 평균)

$= \frac{83+84+79+90+42}{5} = \frac{378}{5} = 75.6$(점)

2. x, y, z의 평균이 5이고 분산이 2일 때, 세 수 x^2, y^2, z^2의 평균은?

① 20　② 23　③ 24　④ 26　⑤ 27

해설

세 수 x, y, z의 평균이 8이므로

$\dfrac{x+y+z}{3}=5$

$\therefore x+y+z=15 \cdots$ ㉠

또, 분산이 2이므로 $\dfrac{(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2}{3}=2$

$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=6$

$\therefore x^2+y^2+z^2-10(x+y+z)+75=6$

위 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-10(15)+75=6$

$x^2+y^2+z^2=81$

따라서 $x^2+y^2+z^2$의 평균은 $\dfrac{81}{3}=27$이다.

3. 다음 표는 S 중학교 5 개의 학급에 대한 학생들의 미술 실기 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은? (단, 각 학급의 학생 수는 모두 같다.)

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	77	77	73	70	82
표준편차	2.2	$2\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\sqrt{4.5}$	$\sqrt{5}$

① A 학급의 학생의 성적이 B 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

② 고득점자는 A 학급보다 B 학급이 더 많다.

③ B 의 표준편차가 A 의 표준편차보다 크므로 변량이 평균주위에 더 집중되는 것은 B 이다.

④ 가장 성적이 고른 학급은 C 학급이다.

⑤ D 학급의 학생의 성적이 평균적으로 A 학급의 학생의 성적보다 낮은 편이다.

해설

표준편차를 근호를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

학급	A	B	C	D	E
표준편차	$2.2 = \sqrt{4.84}$	$2\sqrt{2} = \sqrt{8}$	$\frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{2.5}$	$\sqrt{4.5}$	$\sqrt{5}$

③ 표준편차가 작을수록 변량이 평균 주위에 더 집중된다. 따라서 변량이 평균주위에 더 집중되는 것은 A 이다.

4. 다음 표는 5 개의 학급 A, B, C, D, E에 대한 학생들의 수학 점수의 평균과 표준편차를 나타낸 것이다. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, 각 학급의 학생 수는 모두 같다.)

학급	A	B	C	D	E
평균(점)	67	77	73	67	82
표준편차	2.1	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$\sqrt{4.4}$	$\sqrt{3}$

① A 학급의 학생의 성적이 B 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

② B 학급의 학생의 성적이 D 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

③ 중위권 성적의 학생은 A 학급보다 C 학급이 더 많다.

④ 가장 성적이 고른 학급은 E 학급이다.

⑤ D 학급의 학생의 성적이 평균적으로 C 학급의 학생의 성적보다 높은 편이다.

해설

표준편차를 근호를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

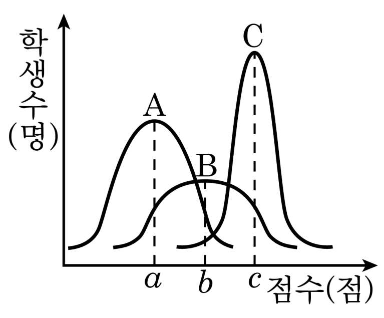
학급	A	B	C	D	E
표준편차	$2.1 = \sqrt{4.41}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{3} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{1.1}$	$\sqrt{4.4}$	$\sqrt{3}$

① B 학급의 학생의 성적이 A 학급의 학생의 성적보다 더 고른 편이다.

④ 가장 성적이 고른 학급은 C 학급이다.

⑤ C 학급의 학생의 성적이 평균적으로 D 학급의 학생의 성적보다 높은 편이다.

5. 다음 그림은 A, B, C 세 학급의 수학 성적을 나타낸 그래프이다. 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① B반 성적은 A반 성적보다 평균적으로 높다.

② 그래프에서 가장 많이 분포되어 있는 곳이 평균이다.

③ C반 성적이 가장 고르다.

④ 평균 주위에 가장 밀집된 반은 A반이다.

⑤ B반보다 A반의 성적이 고르다.

해설

평균 주위에 가장 밀집된 반은 C반이므로 C반 성적이 가장 고르다.

6. 지호네 반 학생 40 명의 몸무게의 평균은 60 kg 이다. 두명의 학생이 전학을 간 후 나머지 38 명의 몸무게의 평균이 59.5 kg 이 되었을 때, 전학을 간 두 학생의 몸무게의 평균은?

① 62.5 kg ② 65.5 kg ③ 67 kg
④ 69 kg ⑤ 69.5 kg

해설
40 명의 몸무게의 총합 : $60 \times 40 = 2400(\mathrm{kg})$
전학생 2 명을 뺀 38 명의 몸무게의 총합 : $59.5 \times 38 = 2261(\mathrm{kg})$
전학생 2 명의 몸무게의 총합 : $2400 - 2261 = 139(\mathrm{kg})$
$\therefore$ (전학생 2 명의 몸무게의 평균)$= \dfrac{139}{2} = 69.5(\mathrm{kg})$

7. 세 수 x, y, z 의 평균과 분산이 각각 4, 2 일 때, x^2, y^2, z^2 의 평균은?

① $\frac{50}{3}$ ② $\frac{51}{3}$ ③ $\frac{52}{3}$ ④ $\frac{53}{3}$ ⑤ 18

해설

세 수 x, y, z 의 평균이 4 이므로

$\frac{x+y+z}{3}=4$

$\therefore\ x+y+z=12\ \cdots\cdots$ ㉠

또한, x, y, z 의 분산이 2 이므로

$\frac{(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2}{3}=2$

$(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=6$

$x^2-8x+16+y^2-8y+16+z^2-8z+16=6$

$x^2+y^2+z^2-8(x+y+z)+48=6$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-8\times12+48=6$

$\therefore x^2+y^2+z^2=54$ 따라서 x^2, y^2, z^2 의 평균은

$\frac{x^2+y^2+z^2}{3}=\frac{54}{3}=18$ 이다.

8. 네 개의 변량 4, 6, a, b 의 평균이 5 이고, 분산이 3 일 때, 7, a^2, b^2, 9 의 평균은?

① 16 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

변량 4, 6, a, b 의 평균이 5 이므로

$\frac{4+6+a+b}{4}=5,\quad a+b+10=20$

$\therefore a+b=10 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또한, 분산이 3 이므로

$\frac{(4-5)^2+(6-5)^2+(a-5)^2+(b-5)^2}{4}=3$

$\frac{1+1+a^2-10a+25+b^2-10b+25}{4}=3$

$\frac{a^2+b^2-10(a+b)+52}{4}=3$

$a^2+b^2-10(a+b)+52=12$

$\therefore\ a^2+b^2-10(a+b)=-40 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$\therefore\ a^2+b^2=10(a+b)-40=10\times10-40=60$

따라서 7, a^2, b^2, 9 의 평균은

$\frac{7+a^2+b^2+9}{4}=\frac{16+60}{4}=19$ 이다.

9. 네 수 5, 7, x, y 의 평균이 4 이고, 분산이 3 일 때, 5, $2x^2$, $2y^2$, 7 의 평균은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

변량 5, 7, x, y 의 평균이 4 이므로

$\frac{5+7+x+y}{4}=4,\quad x+y+12=16$

$\therefore x+y=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또한, 분산이 3 이므로

$\frac{(5-4)^2+(7-4)^2+(x-4)^2+(y-4)^2}{4}=3,$

$\frac{1+9+x^2-8x+16+y^2-8y+16}{4}=3,$

$\frac{x^2+y^2-8(x+y)+42}{4}=3$

$x^2+y^2-8(x+y)+42=12$

$\therefore\ x^2+y^2-8(x+y)=-30 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$\therefore\ x^2+y^2=8(x+y)-30=8\times4-30=2$

따라서 5, $2x^2$, $2y^2$, 7 의 평균은

$\frac{5+2x^2+2y^2+7}{4}=\frac{12+2(x^2+y^2)}{4}=\frac{12+4}{4}=4$ 이다.

10. 세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균과 분산이 각각 5, 3 일 때, $\frac{1}{2}x^2,\ \frac{1}{2}y^2,\ \frac{1}{2}z^2$ 의 평균은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균이 5 이므로

$\frac{x+y+z}{3}=5$

$\therefore x+y+z=15 \cdots\cdots ㉠$

또한, $x,\ y,\ z$ 의 분산이 3 이므로

$\frac{(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2}{3}=3$

$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=9$

$x^2-10x+25+y^2-10y+25+z^2-10z+25=9$

$x^2+y^2+z^2-10(x+y+z)+75=9$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2+z^2-10\times 15+75=9$

$\therefore x^2+y^2+z^2=84$

따라서 $\frac{1}{2}x^2,\ \frac{1}{2}y^2,\ \frac{1}{2}z^2$ 의 평균은

$\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)=\frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)=\frac{84}{6}=14$ 이다.

11. 다섯 개의 변량 5, 6, x, y, 7 의 평균이 8 이고, 분산이 5 일 때, 2, 3, $\frac{1}{5}x^2$, $\frac{1}{5}y^2$ 의 평균은?

① 5　　② 7　　③ 9　　④ 11　　⑤ 13

해설

다섯 개의 변량 5, 6, x, y, 7 의 평균이 8 이므로

$\frac{5+6+x+y+7}{5}=8,\quad x+y+18=40$

$\therefore x+y=22 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, 분산이 5 이므로

$\frac{(5-8)^2+(6-8)^2+(x-8)^2+(y-8)^2}{5}+\frac{(7-8)^2}{5}=5$

$\frac{9+4+x^2-16x+64+y^2-16y+64+1}{5}=5$

$\frac{x^2+y^2-16(x+y)+142}{5}=5$

$x^2+y^2-16(x+y)+142=25$

$\therefore x^2+y^2-16(x+y)=-117 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

$x^2+y^2=16(x+y)-117=16\times 22-117$

$\therefore\ x^2+y^2=235$

따라서 1, 2, $\frac{1}{5}x^2$, $\frac{1}{5}y^2$ 의 평균은

$\frac{1}{4}\left(2+3+\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}\right)=\frac{1}{4}\left\{5+\frac{1}{5}(x^2+y^2)\right\}=13$ 이다.

12. 세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균과 분산이 각각 3, 4 일 때, $x-1,\ y-1,\ z-1$ 의 평균과 표준편차를 차례대로 구하여라.

① 2, 2　② 3, 5　③ 4, 4　④ 5, 4　⑤ 6, 5

해설

세 수 $x,\ y,\ z$ 의 평균이 3 이므로

$$\frac{x+y+z}{3}=3$$

$\therefore x+y+z=9 \ \cdots\cdots$ ㉠

또한, $x,\ y,\ z$ 의 분산이 4 이므로

$$\frac{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2}{3}=4$$

$$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=12$$

$$x^2-6x+9+y^2-6y+9+z^2-6z+9=12$$

$$x^2+y^2+z^2-6(x+y+z)+27=12$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$x^2+y^2+z^2-6\times 9+27=12$$

$\therefore x^2+y^2+z^2=39$

한편, $x-1,\ y-1,\ z-1$ 의 평균은

$$\frac{(x-1)+(y-1)+(z-1)}{3}$$

$$=\frac{(x+y+z)-3}{3}=\frac{9-3}{3}=2$$

분산은

$$\frac{(x-1-2)^2+(y-1-2)^2+(z-1-2)^2}{3}$$

$$=\frac{(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2}{3}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2-6(x+y+z)+9\times 3}{3}$$

$$=\frac{39-6\times 9+27}{3}=\frac{12}{3}=4$$

따라서 $x-1,\ y-1,\ z-1$ 의 표준편차는 $\sqrt{4}=2$ 이다.

13. 세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 , 분산이 4 일 때, 변량 $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① 2, 5　② 3, 5　③ 4, 4　④ 5, 4　⑤ 6, 5

해설

세 수 $a,\ b,\ c$ 의 평균이 2 이므로

$\frac{a+b+c}{3}=2$

$\therefore a+b+c=6$ ⋯⋯㉠

또한, $a,\ b,\ c$ 의 분산이 4 이므로

$\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}=4$

$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=12$

$a^2-4a+4+b^2-4b+4+c^2-4c+4=12$

$a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+12=12$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$a^2+b^2+c^2-4\times6+12=12$

$\therefore a^2+b^2+c^2=24$

한편, $a+3,\ b+3,\ c+3$ 의 평균은

$\frac{(a+3)+(b+3)+(c+3)}{3}=\frac{(a+b+c)+9}{3}$

$=\frac{6+9}{3}=5$

따라서 분산은

$\frac{(a+3-5)^2+(b+3-5)^2+(c+3-5)^2}{3}$

$=\frac{(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2}{3}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)+4\times3}{3}$

$=\frac{24-4\times6+12}{3}=\frac{12}{3}=4$

14. 세 개의 변량 $a,\ b,\ c$ 의 평균을 M , 표준편차를 S 라고 할 때, $a+1,\ b+1,\ c+1$ 의 평균과 분산을 차례대로 나열한 것은?

① $M,\ S^2$　　② $M,\ S^2+1$

③ $M+1,\ S^2$　　④ $M+1,\ S^2+1$

⑤ $M+1,\ (S+1)^2$

해설

세 개의 변량 $a,\ b,\ c$ 의 평균과 분산이 각각 M , S^2 이므로

$M=\dfrac{a+b+c}{3}$

$S^2=\dfrac{(a-M)^2+(b-M)^2+(c-M)^2}{3}$

$a+1,\ b+1,\ c+1$ 의 평균을 M_1 과 분산을 S_1^2 이라고 하면

$M_1=\dfrac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{3}$

$=\dfrac{(a+b+c)+3}{3}=\dfrac{a+b+c}{3}+1=M+1$

$S_1^2=\dfrac{1}{3}\{(a+1-M-1)^2+(b+1-M-1)^2+(c+1-M-1)^2\}$

$=\dfrac{1}{3}\{(a-M)^2+(b-M)^2+(c-M)^2\}=S^2$

따라서 $a+1,\ b+1,\ c+1$ 의 평균과 분산은 각각 $M+1,\ S^2$ 이다.

15. 자연수 a, b, c에 대하여 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ 인 직육면체의 부피가 $6\sqrt{5}$일 때, 이 직육면체의 겉넓이의 최댓값을 구하여라. (단, $a \le b \le c$)

① $1+2\sqrt{5}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $2+12\sqrt{3}$
④ $2+21\sqrt{5}$　⑤ $2+24\sqrt{5}$

해설

부피는 $\sqrt{abc} = 6\sqrt{5} = \sqrt{180}$
$\therefore\ abc = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
한편 직육면체의 겉넓이는
$2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$ 이고
$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$가 최댓값을 갖기 위한 자연수 a, b, c의 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 180)$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore (\text{직육면체의 겉넓이}) &= 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \\ &= 2(1+\sqrt{180}+\sqrt{180}) \\ &= 2(1+6\sqrt{5}+6\sqrt{5}) \\ &= 2(1+12\sqrt{5}) \\ &= 2+24\sqrt{5}\end{aligned}$$