1. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

2. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

3. $y = -3(x-2)(x-4)$ 의 그래프에서 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = -3(x-2)(x-4)$
$= -3(x^2 - 6x + 8)$
$= -3x^2 + 18x - 24$
$= -3(x-3)^2 + 3$
$x = 3$ 일 때, 최댓값은 3 이다.

4. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값은?

① -14 ② 14 ③ -5 ④ 5 ⑤ 4

해설

$y = x^2 - 6x - 5$
$= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5$
$= (x - 3)^2 - 14$

$\therefore x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

5. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y=x^2+x-1$
② $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$
③ $y=\frac{1}{5}x^2+4$
④ $y=-x^2-2x+1$
⑤ $y=\frac{3}{4}(x+1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수인 것을 찾는다.

6. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $x = 1$에서 최솟값 1을 가지고 $f(2) = 3$을 만족시킬 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로
$a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$
즉, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ 이므로
$b = -4,\ c = 3$
$\therefore a + b + c = 2 - 4 + 3 = 1$

7. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$일 때, 상수 k의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore\ k = -\frac{1}{2}$

8. 그래프의 모양이 $y=-2x^2$ 과 같고 $x=1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y=-2x^2-4x+4$
② $y=-2x^2-4x+5$
③ $y=-2x^2+4x-3$
④ $y=-2x^2+4x+3$
⑤ $y=-2x^2-x+5$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 5), x^2 의 계수가 -2 이므로
$y=-2(x-1)^2+5$
$=-2(x^2-2x+1)+5$
$=-2x^2+4x+3$
$\therefore y=-2x^2+4x+3$

9. $x=-2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y=-\frac{3}{2}(x-2)^2+3$
② $y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+3$
③ $y=-\frac{2}{3}(x-2)^2+3$
④ $y=-\frac{2}{3}(x+2)^2+3$
⑤ $y=-2x^2+3$

해설

$x=-2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y=a(x+2)^2+3$ 의 형태임을 의미한다.
이 중 $(0,\ -3)$ 을 지나면,

$-3=4a+3$
$4a=-6$
$a=\frac{3}{2}$
$\therefore\ y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+3$

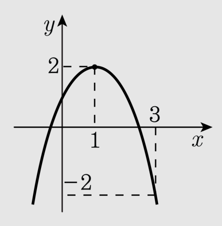
10. x의 범위가 $0 \le x \le 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$
이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.
$\therefore\ M + m = 2 + (-2) = 0$



11. 두 포물선 $y = x^2 - 2ax + 4,\ y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4$ 중 하나만이 x 축과 만날 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \le -5$ 또는 $-3 \le a < -1$ 또는 $a > 0$

② $a \le -4$ 또는 $-1 \le a < 1$ 또는 $a > 2$

③ $a \le -2$ 또는 $1 \le a < 2$ 또는 $a > 3$

④ $a \le 0$ 또는 $2 \le a < 3$ 또는 $a > 5$

⑤ $a \le 1$ 또는 $3 \le a < 4$ 또는 $a > 9$

해설

이차방정식 $x^2 - 2ax + 4 = 0,\ x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4 = 0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하자. $y = x^2 - 2ax + 4$의 그래프가 x축과 만날 조건은 $\frac{D_1}{4} = a^2 - 4 \ge 0$

$\therefore a \le -2$ 또는 $a \ge 2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4$의 그래프가 x축과 만날 조건은

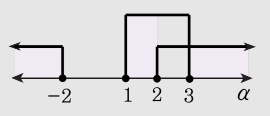
$\frac{D_2}{4} = (a-1)^2 - 2a^2 + 6a - 4 \ge 0$

$-a^2 + 4a - 3 \ge 0,\ a^2 - 4a + 3 \le 0$

$(a-1)(a-3) \le 0$

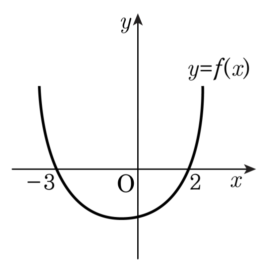
$\therefore 1 \le a \le 3$ $\cdots\cdots$ ㉡

두 개의 포물선 중 하나만이 x축과 만나려면 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내어 ㉠, ㉡중 하나만을 만족하는 a의 값의 범위를 구하면 된다.



따라서, 구하는 a의 값의 범위는 $a \le -2$ 또는 $1 \le a < 2$ 또는 $a > 3$

12. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1개　　② 2개　　③ 3개

④ 4개　　⑤ 5개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0,\ f(2) = 0$ 이므로
방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은
(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2$ $\quad\therefore\ x = \pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3$ $\quad\therefore\ x = \pm\sqrt{3}$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

13. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

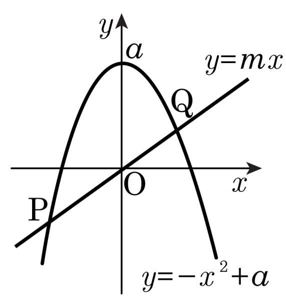
▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$ ㉠
$y = x + 1 \qquad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

14. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

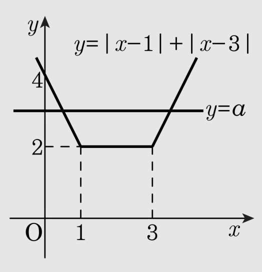
$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

15. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

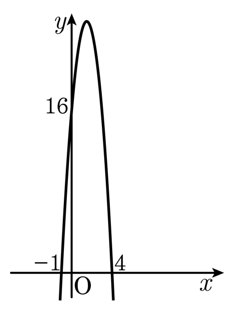
① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
$a>2$



16. 다음 그래프에서 최댓값을 구하면?



① 21 ② 22 ③ 23

④ 24 ⑤ 25

해설

x 절편이 -1 과 4 이므로

$y=a(x+1)(x-4)$

점 $(0,\ 16)$을 지나므로

$16=a(-4)$, $a=-4$

$$\begin{aligned} y &= -4(x+1)(x-4) \\ &= -4(x^2-3x-4) \\ &= -4\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+16 \\ &= -4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+25 \end{aligned}$$

$x=\dfrac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 25 이다.

17. x 축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$ 에서 만나고 최댓값이 9 인 포물선의 방정식은?

① $y=-4x^2+4x-8$

② $y=4x^2-4x+8$

③ $y=-4x^2+4x+8$

④ $y=-4x^2-4x+8$

⑤ x 축과 두 점 $(p,0),(q,0)$ 에서 만나는 $\overline{pq}$ 의 길이를 이등분한 점이 축의 방정식이 된다.

해설

대칭축이 두 점의 중점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ 을 지나므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ 9\right)$

따라서 $y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+9$

$(1,\ 0)$ 을 대입하면 $0=\frac{9}{4}a+9$, $a=-4$

$\therefore\ y=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+9=-4x^2-4x+8$

18. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 $x = 3$ 에서 최솟값 -10 을 가질 때 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = -3$

▷ 정답: $b = -1$

해설

$x = 3$ 일 때, 최솟값 -10 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ -10)$ 이다.

$y = x^2 + 2ax + b$

$= (x - 3)^2 - 10$

$= x^2 - 6x - 1$

$\therefore a = -3, b = -1$

19. 이차함수 $y = x^2 + 2bx + c$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 3 을 가질 때, $b + c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 1$ 일 때, 최솟값 3 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 (1, 3) 이다.

$y = x^2 + 2bx + c$
$= (x-1)^2 + 3$
$= x^2 - 2x + 4$ $\therefore b = -1, c = 4$

$\therefore b + c = 3$

20. $x^2 - 5x + 6 < 0$ 일 때, $P = x^2 + 5x + 6$ 이 취할 수 없는 값은?

① 22　　② 24　　③ 26　　④ 28　　⑤ 30

해설

$x^2 - 5x + 6 < 0$, $(x-2)(x-3) < 0$ $\quad \therefore\ 2 < x < 3$

이 때, $P = x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 이므로

$2 < x < 3$ 인 구간에서의 P 는 증가함수이다.
따라서 $P_{x=2} < P < P_{x=3}$ 이 성립한다.
$P_{x=2} = 20,\ P_{x=3} = 30$ 이므로 $20 < P < 30$

21. 이차함수 $y=x^2+2ax+2a$ 의 최솟값을 m이라고 할 때, m의 최댓값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$y=x^2+2ax+2a=(x+a)^2-a^2+2a$

$\therefore m=-a^2+2a=-(a-1)^2+1$

따라서 m의 최댓값은 1이다.

22. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax + a - 2$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{33}{16}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4ax + a - 2 \\ &= -(x^2 - 4ax) + a - 2 \\ &= -(x - 2a)^2 + 4a^2 + a - 2 \end{aligned}$$

최댓값 $M = 4a^2 + a - 2$

$$\begin{aligned} &= 4\left(a^2 + \frac{1}{4}a\right) - 2 \\ &= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 \\ &= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{16} \end{aligned}$$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{33}{16}$ 이다.

23. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\ (0 \le x \le 3)$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

24. 함수 $f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2x+3)+3x^2-6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-2x+2=t$ 로 놓으면
$t=(x-1)^2+1\ge 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x)=g(t)&=t(t+1)+3t-6\\ &=t^2+4t-6\\ &=(t+2)^2-10\ (t\ge 1)\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은
$g(1)=(1+2)^2-10=-1$

25. 방정식 $(x^2+x+2)^2 = x^2+x+4$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$(x^2+x+2)^2 = x^2+x+4$에서
$x^2+x+2 = A$라 하면
$A^2 = A+2$,
$A^2 - A - 2 = 0$, $(A+1)(A-2) = 0$
$\therefore A = -1$ 또는 $A = 2$
(i) $x^2+x+2 = -1$일 때, $x^2+x+3 = 0$
(ii) $x^2+x+2 = 2$일 때, $x^2+x = 0$
(i), (ii)에서 α, β는 허근이므로 $x^2+x+3 = 0$의 근이 된다.
따라서, $\alpha+\beta = -1$, $\alpha\beta = 3$이므로
$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2\times 3 = -5$

26. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$이 직선 $y = kx - 6$보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$을 이용하여 $\alpha + \beta$를 구하면,

$(1 + k)^2 - 36 < 0$

$k^2 + 2k - 35 < 0$, $(k + 7)(k - 5) < 0$ $\therefore$ $-7 < k < 5$

$\therefore$ $\alpha + \beta = -7 + 5 = -2$

27. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1,\ 6)$ 을 지난다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -3)$ 이므로 $y = a(x-2)^2 - 3$
점 $(-1,\ 6)$ 을 대입하면 $a = 1$
$y = (x-2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ 에서
$a = 1$, $b = -4$, $c = 1$
따라서 $a + b + c = -2$ 이다.

28. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x-a)^2 - a^2 + 4a - 4$

이므로 $x = a$일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$를 가진다.

$\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a-2)^2$

따라서 m은 $a = 2$일 때 최댓값 0을 가진다.

29. $x+y=3,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 이므로
$y=-x+3 \geq 0 \ \rightarrow \ -x \geq -3 \ \rightarrow \ x \leq 3 \therefore\ 0 \leq x \leq 3\ (\because\ x \geq 0)$
또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$
완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$
$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 $18 \therefore M-m=12$

30. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x-1)^2 + (y+3)^2 + 5$
이 때, x, y 가 실수이므로
$(x-1)^2 \geq 0$, $(y+3)^2 \geq 0$
$\therefore\ 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$
따라서 구하는 최솟값은 5 이다.

31. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\ge 0$
$\to\ 4y^2+16y-20\le 0$
$\to\ y^2+4y-5\le 0$
$\to\ (y+5)(y-1)\le 0$
$\therefore\ -5\le y\le 1$
$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

32. 둘레의 길이가 $32\,\mathrm{cm}$ 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $8\,\mathrm{cm}$

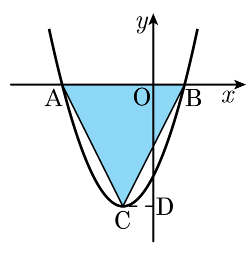
해설

가로의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$, 넓이를 $y\,\mathrm{cm}^2$ 라 하면,

$$
\begin{aligned}
y &= x(16-x) \\
&= -x^2+16x \\
&= -(x^2-16x) \\
&= -(x-8)^2+64
\end{aligned}
$$

따라서 가로의 길이가 $8\,\mathrm{cm}$ 일 때, 넓이가 최대이다.

33. 다음 그림과 같이 $y=x^2+2x-3$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A ,B , 꼭짓점을 C 라 할 때, △ABC 의 넓이는?



① 6　　② 7　　③ 8

④ 9　　⑤ 10

해설

$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

꼭짓점 C$(-1,-4)$

$y=0$ 일 때 $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$ 이므로

A$(-3,0)$, B$(1,0)$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

34. 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

① 3000 원 ② 3500 원 ③ 4000 원
④ 4500 원 ⑤ 5000 원

해설

수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$$f(x) = (6000 - 500x)(600 + 100x)$$
$$= -50000x^2 + 300000x + 3600000$$
$$= -50000(x-3)^2 + 4050000$$

$x = 3$ 일 때 최대이다.
즉, (입장권 가격)$= 6000 - 500 \times 3 = 4500$ 원.

35. 지면으로부터 45m 높은 곳에서 초속 40m 로 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라 할 때, $y = 45 + 40x - 5x^2$ 인 관계가 성립한다. 쏘아올린 물체가 다시 45m 지점을 지나는 시간은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답: ______ 초 후

▷ 정답: 8초 후

해설

$y = 45$ 를 대입하면

$45 = 45 + 40x - 5x^2$

$5x^2 - 40x = 0$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x - 8) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 8$

따라서 45m 지점을 지나는 시간은 8 초 후이다.

36. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$\boxed{x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0,\ x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0}$$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3) = 0$ $\therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\{9 - 3b + a = 0\}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4},\ b = \frac{9}{4},\ ab = -\frac{81}{16}$

37. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0$, $t(t+1)=0$

$\therefore$ $t=0$ 또는 $t=-1$

(i) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ii) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x$, $x^2+x+1=0$

$\therefore$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ $(-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

38. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$이 허근을 갖기 위한 k의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$에서 $x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$

$x=1$일때 성립하므로 $x-1$을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면

$(x-1)(x^2-2x+-k)=0$

허근을 가지려면 $x^2-2x+5-k=0$의 판별식이 0보다 작아야 하므로 $D'=1-5+k<0$

$\therefore\ k<4$

39. 삼차방정식 $x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+(4a+1)=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$　② $a=-2,\ -2\pm\sqrt{10}$

③ $a=3,\ -3\pm\sqrt{5}$　④ $a=1,\ 4\pm\sqrt{10}$

⑤ $a=-1,\ -2\pm2\sqrt{2}$

해설

$f(x)=x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+4a+1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

1	1	2a+3	-6a-5	4a+1
		1	2a+4	-4a-1
	1	2a+4	-4a-1	0

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)\{x^2+2(a+2)x-4a-1\}=0$
(i) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x\neq1$인 경우
$D=0$이므로, $a^2+8a+5=0$
$\therefore\ a=-4\pm\sqrt{11}$
(ii) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면 $1+2(a+2)-4a-1=0$
$\therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$

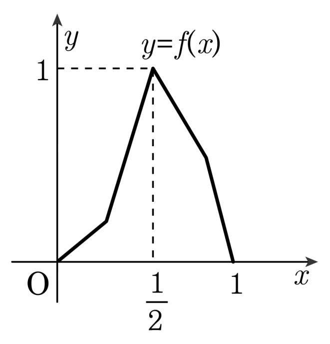
40. α는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때,$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이 되는 자연수 n의 값으로 적당한 것은?

① 65　② 66　③ 67　④ 68　⑤ 69

해설

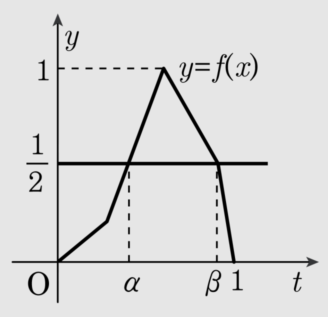
$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n = 0$이므로
양변에 각각 $(1-\alpha)$를 곱하면
$(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)(1-\alpha) = 0,$
$1-\alpha^{n+1} = 0$
$\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$이므로
$\alpha^6 = 1$
$\therefore\ n+1 = 6k(k = 1, 2, 3, \ldots)$
$\therefore\ k = 11$일 때 $n = 65$가 될 수 있다.

41. 함수$y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $0 \le x \le 1$ 을 만족하는 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는?



① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

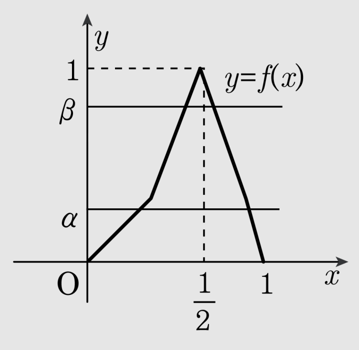
해설



$f(x)=t$ 라 하면

$f(f(x))=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(t)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\alpha,\ \beta$

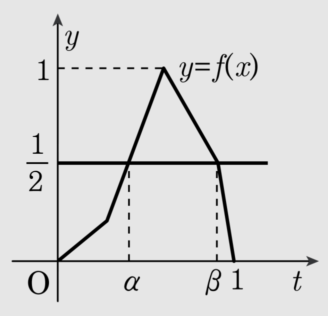
$\left(0<\alpha<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\beta<1\right)$

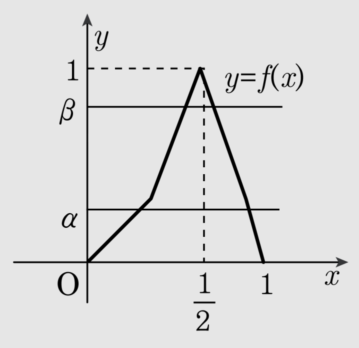


ⅰ) $t=\alpha$ 일 때, $f(x)=\alpha$ 를 만족하는 x 는 두 개

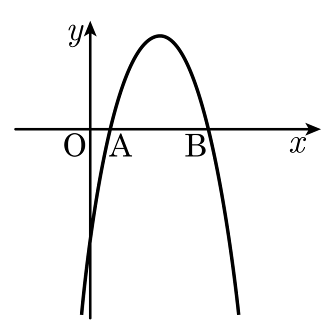
ⅱ) $t=\beta$ 일 때, $f(x)=\beta$ 를 만족하는 x 는

두 개 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 4 개이다.





42. 다음은 이차함수 $y=-x^2+6x+k$ 의 그래프이다. $\overline{AB}=4$ 일 때, 이 이차함수의 최댓값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=-x^2+6x+k=-(x-3)^2+k+9$ 에서
축의 방정식은 $x=3$ 이다.
그림에서 보듯 $\overline{AB}=4$ 이면 점 A , B 는 축 $x=3$ 에서 각각 2 만큼 떨어져 있다.
$\therefore$ A(1, 0), B(5, 0)
구하는 식은 $y=-(x-1)(x-5)=-x^2+6x-5$
$\therefore k=-5$
$y=-(x-3)^2+4$
$\therefore x=3$ 에서 최댓값 4

43. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2 사분면을 지나지 않는다고 할 때, a 의 값의 범위는?

① $a \geq -\frac{3}{4}$ ② $a \leq -\frac{3}{4}$ ③ $a \leq \frac{3}{4}$
④ $a \leq 3$ ⑤ $a \geq -3$

해설

$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$
$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$
$(y\text{절편}) \leq 0, 4a + 3 \leq 0$
$\therefore\ a \leq -\frac{3}{4}$

44. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$　　② $\frac{3}{4}$　　③ $\frac{5}{4}$　　④ $\frac{7}{4}$　　⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$
$\therefore\ a = 5$

(ii) $-1 \le -a < 2$, 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$
$-2 < a \le 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \ge 2$, 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$
$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

45. x 가 실수일 때, $f(x) = (x^2+4x+6)(x^2+4x+2)+2x^2+8x+10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

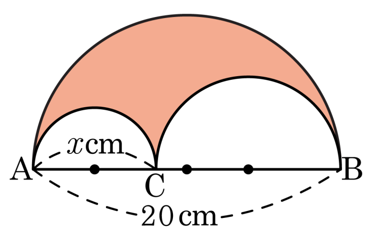
해설

$t = x^2+4x+2 = (x+2)^2-2 \geq -2$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x) = g(t) &= (t+4)t+2t+6 \\ &= t^2+6t+6 = (t+3)^2-3 \end{aligned}$$

$\therefore g(t)$ 는 $t=-2$ 일 때, 최솟값 -2 $(\because t \geq -2)$

46. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 $20\,\mathrm{cm}$ 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\,\mathrm{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



① 10 ② 15 ③ 16 ④ 25 ⑤ 36

해설

$\overline{\mathrm{AC}} = x\,\mathrm{cm}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BC}} = (20-x)\,\mathrm{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2}\times 10^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{20-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{400-40x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{2x^2-40x+400}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-20x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-20x+100-100) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x-10)^2 + 25\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 $10\,\mathrm{cm}$ 일 때, 넓이는 최댓값 $25\pi\,\mathrm{cm}^2$ 를 갖는다.

47. 삼차방정식 $x^3 + px + 2 = 0$의 세 근이 모두 정수일 때, p의 값을 구하면?

① 4　　② -3　　③ -2　　④ 4　　⑤ 5

해설

세 근을 α , β , γ 라고 하면

$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\alpha\beta\gamma = -2 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉢에서

$-2 = (-1)\times1\times2 = 1\times1\times(-2) = (-1)(-1)(-2)$

㉠에서 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이어야 하므로

$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$

㉡에서 $p = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times 1 = -3$

48. 실계수 사차방정식$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$의 네 개의 근 중에서 두 근 α,β가 $\alpha+\beta=2+3i,\ \alpha\beta=5i$일 때, $\dfrac{e-b}{a}$의 값은?

① 25　② 26　③ 27　④ 28　⑤ 29

해설

$\alpha+\beta=2+3i,\ \alpha\beta=5i$이므로
$\alpha,\ \beta$는 모두 허수이다.
또한 방정식의 계수가 실수이므로
나머지 두 근은 $\overline{\alpha},\overline{\beta}$이다.
따라서 $\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$가 네 근이 되므로
주어진 방정식은
$a(x-\alpha)(a-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})=0$이 된다.
계수 비교를 통해
$\dfrac{e}{a}$는 네 근의 곱이 됨을 알 수가 있고
$-\dfrac{b}{a}$는 네 근의 합이 됨을 알 수 있다.
$\therefore\ \dfrac{e-b}{a}=\alpha\times\overline{\alpha}\times\beta\times\overline{\beta}+(\alpha+\overline{\alpha}+\beta+\overline{\beta})$
$=(5i)(\overline{5i})+(2+3i)+(\overline{2+3i})=29$

49. 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 과 방정식 $x^2+ax+2=0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a-b+c$ 의 값은? (단, a,b,c 는 실수)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -9

해설

$1+\sqrt{3}i$가 근이므로 $1-\sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+\alpha=-a \cdots\cdots$ ㉠

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\alpha+(1-\sqrt{3}i)\alpha=b \cdots\cdots$ ㉡

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)\alpha=-c \cdots\cdots$ ㉢

또, 방정식 $x^2+ax+2=0$ 과의 공통근이 α 이므로

$\alpha^2+a\alpha+2=0 \cdots\cdots$ ㉣

㉠에서 $\alpha=-a-2$ 를 ㉣에 대입하면

$(-a-2)^2+a(-a-2)+2=0$

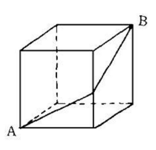
$\therefore a=-3,\ \alpha=1$

㉡에서 $b=2\alpha+4=6$

㉢에서 $c=-4\alpha=-4$

$\therefore\ a-b+c=-3-6-4=-13$

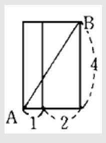
50. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 합이 28 cm, 겉넓이가 28cm^2, 부피가 8cm^3 인 직육면체가 있다. 이 직육면체에서 면을 따라 꼭지점 A 에서 꼭짓점 B 에 이르는 가장 짧은 거리는?

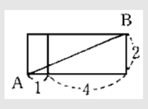


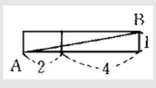
① 5cm ② 6cm ③ $2\sqrt{5}$cm
④ $\sqrt{29}$cm ⑤ $\sqrt{37}$cm

해설

각 모서리의 길이를 $a,\ b,\ c$ 라 하면
$4(a+b+c)=28$
$2(ab+bc+ca)=28$
$abc=8$
$\therefore\ a+b+c=7$
$ab+bc+ca=14$
$abc=8$
이 때, $a,\ b,\ c$ 를 세 근으로 하는 x 에 대한 삼차방정식은 $x^3-7x^2+14x-8=0$ $(x-1)(x-2)(x-4)=0$ 그러므로 모서리의 길이는 각각 1cm , 2cm , 4cm 이다. 이제 꼭짓점 A 에서 꼭지점 B 에 이르는 거리를전개도를 이용하여 구해 보자.

(i) 

(ii) 

(iii) 

(i) 에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+4^2}=5(\mathrm{cm})$
(ii) 에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}(\mathrm{cm})$
(iii) 에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}(\mathrm{cm})$
따라서 A 에서 B 에 이르는 가장 짧은 거리는 5cm