

1. 이차함수 $y = x^2 + (k - 3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$

② $-1 < k < 8$

③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$

⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가

x 축과 만나지 않으려면

이차방정식 $x^2 + (k - 3)x + k = 0$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$D = (k - 3)^2 - 4k < 0$$

$$k^2 - 10k + 9 < 0, (k - 1)(k - 9) < 0$$

$$\therefore 1 < k < 9$$

2. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

3. $y = -3(x-2)(x-4)$ 의 그래프에서 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}y &= -3(x-2)(x-4) \\&= -3(x^2 - 6x + 8) \\&= -3x^2 + 18x - 24 \\&= -3(x-3)^2 + 3\end{aligned}$$

$x = 3$ 일 때, 최댓값은 3 이다.

4. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값은?

①

-14

② 14

③ -5

④ 5

⑤ 4

해설

$$y = x^2 - 6x - 5$$

$$= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5$$

$$= (x - 3)^2 - 14$$

$\therefore x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

5. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y = x^2 + x - 1$

② $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 1$

③ $y = \frac{1}{5}x^2 + 4$

④ $y = -x^2 - 2x + 1$

⑤ $y = \frac{3}{4}(x + 1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수인 것을 찾는다.

6. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 1을 가지고 $f(2) = 3$ 을 만족시킬 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값은?

① -4

② -3

③ 1

④ 4

⑤ 7

해설

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로

$$a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$$

즉, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ 이므로

$$b = -4, c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 2 - 4 + 3 = 1$$

7. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② 0

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.

주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$$\therefore k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

8. 그래프의 모양이 $y = -2x^2$ 과 같고 $x = 1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다.
이때, 이 함수의 식은?

① $y = -2x^2 - 4x + 4$

② $y = -2x^2 - 4x + 5$

③ $y = -2x^2 + 4x - 3$

④ $y = -2x^2 + 4x + 3$

⑤ $y = -2x^2 - x + 5$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 5), x^2 의 계수가 -2 이므로

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2 + 5 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1) + 5 \\ &= -2x^2 + 4x + 3 \\ \therefore y &= -2x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

9. $x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0, -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y = -\frac{3}{2}(x-2)^2 + 3$

② $y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$

③ $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2 + 3$

④ $y = -\frac{2}{3}(x+2)^2 + 3$

⑤ $y = -2x^2 + 3$

해설

$x = -2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y = a(x+2)^2 + 3$ 의 형태임을 의미한다.

이 중 $(0, -3)$ 을 지나면,

$$-3 = 4a + 3$$

$$4a = -6$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 3$$

10. x 의 범위가 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

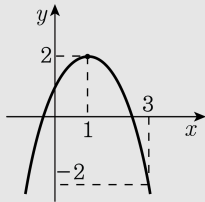
▷ 정답 : 0

해설

$$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$$

이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.

$$\therefore M + m = 2 + (-2) = 0$$



11. 두 포물선 $y = x^2 - 2ax + 4$, $y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4$ 중 하나만이 x 축과 만날 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a \leq -5$ 또는 $-3 \leq a < -1$ 또는 $a > 0$

② $a \leq -4$ 또는 $-1 \leq a < 1$ 또는 $a > 2$

③ $a \leq -2$ 또는 $1 \leq a < 2$ 또는 $a > 3$

④ $a \leq 0$ 또는 $2 \leq a < 3$ 또는 $a > 5$

⑤ $a \leq 1$ 또는 $3 \leq a < 4$ 또는 $a > 9$

해설

이차방정식 $x^2 - 2ax + 4 = 0$, $x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4 = 0$ 의 판별식을 각각 D_1 , D_2 라 하자. $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 그래프가

x 축과 만날 조건은 $\frac{D_1}{4} = a^2 - 4 \geq 0$

$\therefore a \leq -2$ 또는 $a \geq 2$ ㉠

$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4$ 의 그래프가 x 축과 만날 조건은

$\frac{D_2}{4} = (a-1)^2 - 2a^2 + 6a - 4 \geq 0$

$-a^2 + 4a - 3 \geq 0$, $a^2 - 4a + 3 \leq 0$

$(a-1)(a-3) \leq 0$

$\therefore 1 \leq a \leq 3$ ㉡

두 개의 포물선 중 하나만이 x 축과 만나려면 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내어 ㉠, ㉡중 하나만을 만족하는 a 의 값의 범위를 구하면 된다.



따라서, 구하는 a 의 값의 범위는 $a \leq -2$ 또는 $1 \leq a < 2$ 또는 $a > 3$

12. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

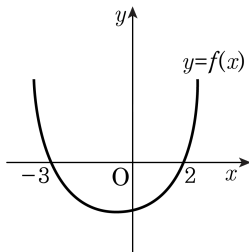
① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개



해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로

방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore x = \pm \sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm \sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개 이다.

13. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$ 이 한 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = x^2 + ax + a \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = x + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 y 를 소거하여 정리하면

$$x^2 + ax + a = x + 1$$

$$\therefore x^2 + (a-1)x + a-1 = 0$$

㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D 라 하면

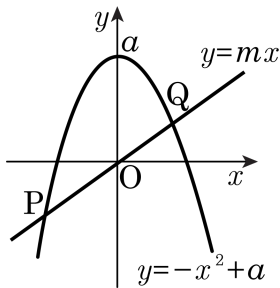
$$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$$

$$\therefore (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$$

$$\therefore (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1 \text{ 또는 } 5$$

따라서 구하는 a 의 값은 6

14. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 일 때, $a + m$ 의 값을 구하여라. (단, a, m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.

점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 이므로

방정식 $x^2 + mx - a = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m = (\sqrt{5} - 1) + (-\sqrt{5} - 1) = -2$$

$$-a = (\sqrt{5} - 1)(-\sqrt{5} - 1) = -4$$

$$\therefore a = 4, m = 2 \quad \therefore a + m = 6$$

15. x 의 방정식 $|x-1| + |x-3| = a$ 가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$

② $a > 1$

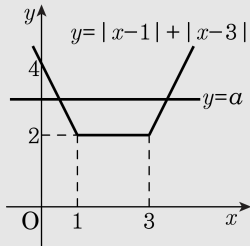
③ $a < 2$

④ $a > 2$

⑤ $a < 3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
 $a > 2$



16. 다음 그래프에서 최댓값을 구하면?

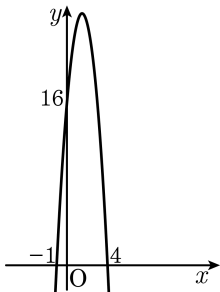
① 21

② 22

③ 23

④ 24

⑤ 25



해설

x 절편이 -1 과 4 이므로

$$y = a(x+1)(x-4)$$

점 $(0, 16)$ 을 지나므로

$$16 = a(-4), a = -4$$

$$y = -4(x+1)(x-4)$$

$$= -4(x^2 - 3x - 4)$$

$$= -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 16$$

$$= -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 25$$

$x = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 25 이다.

17. x 축과 두 점 $(-2, 0)$, $(1, 0)$ 에서 만나고 최댓값이 9 인 포물선의 방정식은?

① $y = -4x^2 + 4x - 8$

② $y = 4x^2 - 4x + 8$

③ $y = -4x^2 + 4x + 8$

④ $y = -4x^2 - 4x + 8$

⑤ x 축과 두 점 $(p, 0)$, $(q, 0)$ 에서 만나는 $\overline{pq}$ 의 길이를 이등분한 점이 축의 방정식이 된다.

해설

대칭축이 두 점의 중점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 지나므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 9\right)$

따라서 $y = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 9$

$(1, 0)$ 을 대입하면 $0 = \frac{9}{4}a + 9$, $a = -4$

$\therefore y = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 9 = -4x^2 - 4x + 8$

18. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 $x = 3$ 에서 최솟값 -10 을 가질 때 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

▷ 정답 : $b = -1$

해설

$x = 3$ 일 때, 최솟값 -10 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(3, -10)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax + b \\ &= (x - 3)^2 - 10 \\ &= x^2 - 6x - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

19. 이차함수 $y = x^2 + 2bx + c$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 3 을 가질 때, $b + c$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$x = 1$ 일 때, 최솟값 3 을 가지므로 꼭짓점의 좌표는 $(1, 3)$ 이다.

$$y = x^2 + 2bx + c$$

$$= (x - 1)^2 + 3$$

$$= x^2 - 2x + 4 \therefore b = -1, c = 4$$

$$\therefore b + c = 3$$

20. $x^2 - 5x + 6 < 0$ 일 때, $P = x^2 + 5x + 6$ 이 취할 수 없는 값은?

① 22

② 24

③ 26

④ 28

⑤ 30

해설

$$x^2 - 5x + 6 < 0, (x-2)(x-3) < 0 \quad \therefore 2 < x < 3$$

$$\text{이 때, } P = x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$2 < x < 3$ 인 구간에서의 P 는 증가함수이다.

따라서 $P_{x=2} < P < P_{x=3}$ 이 성립한다.

$$P_{x=2} = 20, P_{x=3} = 30 \text{ 이므로 } 20 < P < 30$$

21. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = x^2 + 2ax + 2a = (x + a)^2 - a^2 + 2a$$

$$\therefore m = -a^2 + 2a = -(a - 1)^2 + 1$$

따라서 m 의 최댓값은 1이다.

22. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax + a - 2$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{33}{16}$

해설

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 4ax + a - 2 \\&= -(x^2 - 4ax) + a - 2 \\&= -(x - 2a)^2 + 4a^2 + a - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{최댓값 } M &= 4a^2 + a - 2 \\&= 4\left(a^2 + \frac{1}{4}a\right) - 2 \\&= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 \\&= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{16}\end{aligned}$$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{33}{16}$ 이다.

23. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \leq a \leq 2$)

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$0 \leq \frac{a}{2} \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{최솟값 } m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4},$$

$$\text{최댓값 } M = f(3) = 9 - 3a$$

$$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a + 6)^2 + 18$$

이때, $0 \leq a \leq 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

24. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면

$t = (x - 1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$f(x) = g(t) = t(t + 1) + 3t - 6$$

$$= t^2 + 4t - 6$$

$$= (t + 2)^2 - 10 \quad (t \geq 1)$$

따라서 구하는 최솟값은

$$g(1) = (1 + 2)^2 - 10 = -1$$

25. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4 \text{에서}$$

$$x^2 + x + 2 = A \text{라 하면}$$

$$A^2 = A + 2,$$

$$A^2 - A - 2 = 0, (A + 1)(A - 2) = 0$$

$$\therefore A = -1 \text{ 또는 } A = 2$$

$$(i) \ x^2 + x + 2 = -1 \text{ 일 때, } x^2 + x + 3 = 0$$

$$(ii) \ x^2 + x + 2 = 2 \text{ 일 때, } x^2 + x = 0$$

(i), (ii)에서 α, β 는 허근이므로 $x^2 + x + 3 = 0$ 의 근이 된다.

따라서, $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 3$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times 3 = -5$$

26. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$ 이 직선 $y = kx - 6$ 보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$ 을 이용하여 $\alpha + \beta$ 를 구하면,

$$(1 + k)^2 - 36 < 0$$

$$k^2 + 2k - 35 < 0, (k + 7)(k - 5) < 0 \therefore -7 < k < 5$$

$$\therefore \alpha + \beta = -7 + 5 = -2$$

27. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 일 때, 최솟값 -3 을 갖고, 그래프가 점 $(-1, 6)$ 을 지난다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2, -3)$ 이므로 $y = a(x - 2)^2 - 3$

점 $(-1, 6)$ 을 대입하면 $a = 1$

$y = (x - 2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$ 에서

$a = 1, b = -4, c = 1$

따라서 $a + b + c = -2$ 이다.

28. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4a - 4$$

이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.

$$\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a - 2)^2$$

따라서 m 은 $a = 2$ 일 때 최댓값 0을 가진다.

29. $x + y = 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ 일 때, $2x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y = -x + 3$ 에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 이므로

$$y = -x + 3 \geq 0 \rightarrow -x \geq -3 \rightarrow x \leq 3 \therefore 0 \leq x \leq 3 (\because x \geq 0)$$

$$\text{또 } 2x^2 + y^2 = 2x^2 + (-x + 3)^2 = 2x^2 + x^2 - 6x + 9 = 3x^2 - 6x + 9$$

$$\text{완전 제곱식으로 바꾸면 } 3(x^2 - 2x) + 9 = 3(x - 1)^2 + 6$$

$$\therefore x = 1 \text{ 일 때 최솟값 } 6, x = 3 \text{ 일 때 최댓값 } 18 \therefore M - m = 12$$

30. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 5$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x - 1)^2 \geq 0, (y + 3)^2 \geq 0$$

$$\therefore 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

31. x 가 실수일 때, $x^2 + 4y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면

$$x^2 - 8x + 4y^2 + 16y - 4 = 0$$

이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때

x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$\therefore D/4 = (-4)^2 - (4y^2 + 16y - 4) \geq 0$$

$$\rightarrow 4y^2 + 16y - 20 \leq 0$$

$$\rightarrow y^2 + 4y - 5 \leq 0$$

$$\rightarrow (y + 5)(y - 1) \leq 0$$

$$\therefore -5 \leq y \leq 1$$

$\therefore y$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -5

32. 둘레의 길이가 32 cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로 길이 구하여라.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 8cm

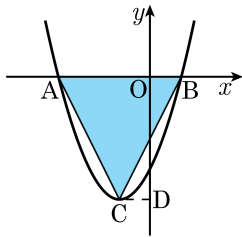
해설

가로의 길이를 x cm, 넓이를 y cm² 라 하면,

$$\begin{aligned}y &= x(16 - x) \\&= -x^2 + 16x \\&= -(x^2 - 16x) \\&= -(x - 8)^2 + 64\end{aligned}$$

따라서 가로의 길이가 8 cm 일 때, 넓이가 최대이다.

33. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B, 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

꼭짓점 $C(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0$ 이므로

$A(-3, 0)$, $B(1, 0)$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

34. 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

① 3000 원

② 3500 원

③ 4000 원

④ 4500 원

⑤ 5000 원

해설

수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} f(x) &= (6000 - 500x)(600 + 100x) \\ &= -50000x^2 + 300000x + 3600000 \\ &= -50000(x - 3)^2 + 4050000 \end{aligned}$$

$x = 3$ 일 때 최대이다.

즉, (입장권 가격) = $6000 - 500 \times 3 = 4500$ 원.

35. 지면으로부터 45m 높은 곳에서 초속 40m 로 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라 할 때, $y = 45 + 40x - 5x^2$ 인 관계가 성립한다. 쏘아올린 물체가 다시 45m 지점을 지나는 시간은 몇 초 후인지 구하여라.



답 :

초 후



정답 : 8초 후

해설

$y = 45$ 를 대입하면

$$45 = 45 + 40x - 5x^2$$

$$5x^2 - 40x = 0$$

$$x^2 - 8x = 0$$

$$x(x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 8$$

따라서 45m 지점을 지나는 시간은 8 초 후이다.

36. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab 의 값은?

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0, x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$$

① -1

② 3

③ $-\frac{9}{4}$

④ $\frac{9}{16}$

⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$ 인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 a, b 값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$ 인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$ 을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\} \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

$\{9 - 3b + a = 0\} \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4}, b = \frac{9}{4}, ab = -\frac{81}{16}$

37. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

38. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$ 이 허근을 갖기 위한 k 의 값이 될 수 없는 것은?

① -2

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$ 에서 $x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$

$x=1$ 일때 성립하므로 $x-1$ 을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면

$$(x-1)(x^2-2x+5-k)=0$$

허근을 가지려면 $x^2-2x+5-k=0$ 의 판별식이 0보다 작아야 하므로 $D'=1-5+k<0$

$$\therefore k<4$$

39. 삼차방정식 $x^3 + (2a+3)x^2 - (6a+5)x + (4a+1) = 0$ 이 중근을 가질 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$ ② $a = -2, -2 \pm \sqrt{10}$
 ③ $a = 3, -3 \pm \sqrt{5}$ ④ $a = 1, 4 \pm \sqrt{10}$
 ⑤ $a = -1, -2 \pm 2\sqrt{2}$

해설

$f(x) = x^3 + (2a+3)x^2 - (6a+5)x + 4a+1$ 이라 하면
 $f(1) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $(x-1)$ 을 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2a+3 & -6a-5 & 4a+1 \\ & & 1 & 2a+4 & -4a-1 \\ \hline & 1 & 2a+4 & -4a-1 & 0 \end{array}$$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$(x-1) \{x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1\} = 0$$

(i) $x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x \neq 1$ 인 경우

$$D = 0 \text{이므로, } a^2 + 8a + 5 = 0$$

$$\therefore a = -4 \pm \sqrt{11}$$

(ii) $x^2 + 2(a+2)x - 4a - 1 = 0$ 이 $x = 1$ 을 근으로 갖는 경우

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + 2(a+2) - 4a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

(i), (ii)에서 $a = 2, -4 \pm \sqrt{11}$

40. α 는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이 되는 자연수 n 의 값으로 적당한 것은?



① 65

② 66

③ 67

④ 68

⑤ 69

해설

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이므로

양변에 각각 $(1 - \alpha)$ 를 곱하면

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(1 - \alpha) = 0,$$

$$1 - \alpha^{n+1} = 0$$

$$\therefore \alpha^{n+1} = 1$$

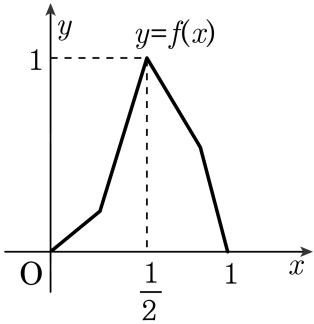
한편, $\alpha^3 = -1$ 이므로

$$\alpha^6 = 1$$

$$\therefore n + 1 = 6k (k = 1, 2, 3, \dots)$$

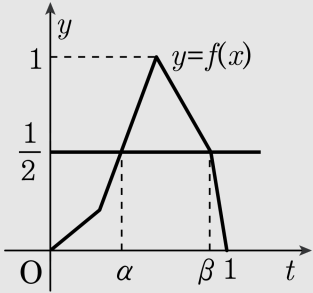
$\therefore k = 11$ 일 때 $n = 65$ 가 될 수 있다.

41. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $0 \leq x \leq 1$ 을 만족하는 방정식 $f(f(x)) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는?



- ① 1 개
- ② 2 개
- ③ 3 개
- ④ 4 개
- ⑤ 5 개

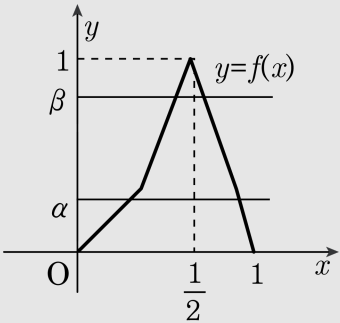
해설



$f(x) = t$ 라 하면

$$f(f(x)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \alpha, \beta$$

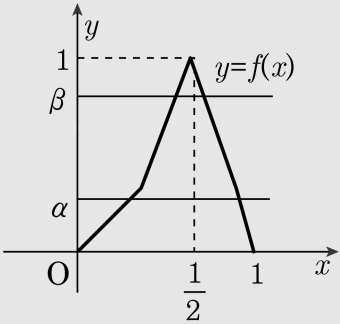
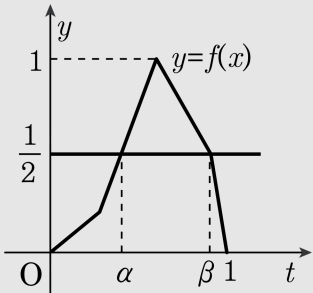
$$\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \beta < 1\right)$$



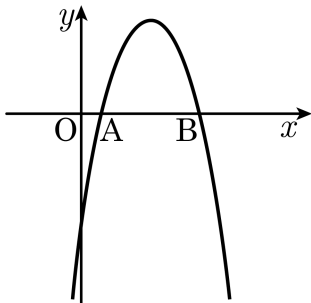
i) $t = \alpha$ 일 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 는 두 개

ii) $t = \beta$ 일 때, $f(x) = \beta$ 를 만족하는 x 는

두 개 방정식 $f(f(x)) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 4개이다.



42. 다음은 이차함수 $y = -x^2 + 6x + k$ 의 그래프이다. $\overline{AB} = 4$ 일 때, 이 이차함수의 최댓값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$y = -x^2 + 6x + k = -(x-3)^2 + k + 9 \text{ 에서}$$

축의 방정식은 $x = 3$ 이다.

그림에서 보듯 $\overline{AB} = 4$ 이면 점 A, B 는 축 $x = 3$ 에서 각각 2 만큼 떨어져 있다.

$$\therefore A(1, 0), B(5, 0)$$

$$\text{구하는 식은 } y = -(x-1)(x-5) = -x^2 + 6x - 5$$

$$\therefore k = -5$$

$$y = -(x-3)^2 + 4$$

$\therefore x = 3$ 에서 최댓값 4

43. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2사분면을 지나지 않는다고 할 때, a 의 값의 범위는?

① $a \geq -\frac{3}{4}$

② $a \leq -\frac{3}{4}$

③ $a \leq \frac{3}{4}$

④ $a \leq 3$

⑤ $a \geq -3$

해설

$$y = a(x - 2)^2 + 3(a < 0)$$

$$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$$

$$(y\text{절편}) \leq 0, 4a + 3 \leq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{3}{4}$$

44. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{3}{4}$

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{7}{4}$

⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(i) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$

$\therefore a = 5$

(ii) $-1 \leq -a < 2$, 즉 $-2 < a \leq 1$ 일 때, $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8$, $a^2 = 9$

$\therefore a = \pm 3$

$-2 < a \leq 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $-a \geq 2$, 즉 $a \leq -2$ 일 때, $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$

$\therefore a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$

45. x 가 실수일 때, $f(x) = (x^2 + 4x + 6)(x^2 + 4x + 2) + 2x^2 + 8x + 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

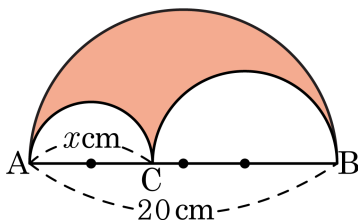
해설

$$t = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \geq -2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= g(t) = (t + 4)t + 2t + 6 \\ &= t^2 + 6t + 6 = (t + 3)^2 - 3\end{aligned}$$

$\therefore g(t)$ 는 $t = -2$ 일 때, 최솟값 -2 ($\because t \geq -2$)

46. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 20 cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi \text{ cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



① 10

② 15

③ 16

④ 25

⑤ 36

해설

$\overline{AC} = x \text{ cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (20 - x) \text{ cm}$ 이다.

따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는

(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합)이다.

$$\frac{1}{2} \times 10^2 \pi - \left\{ \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{20 - x}{2} \right)^2 \right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8} \pi + \frac{400 - 40x + x^2}{8} \pi \right) = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{2x^2 - 40x + 400}{8} \right) \pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x + 100 - 100) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 10)^2 + 25\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 10 cm 일 때, 넓이는 최댓값 $25\pi \text{ cm}^2$ 를 갖는다.

47. 삼차방정식 $x^3 + px + 2 = 0$ 의 세 근이 모두 정수일 때, p 의 값을 구하면?

① 4

② -3

③ -2

④ 4

⑤ 5

해설

세 근을 α, β, γ 라고 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p \quad \cdots \cdots \textcircled{\Delta}$$

$$\alpha\beta\gamma = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{\Xi}$$

⑤에서

$$-2 = (-1) \times 1 \times 2 = 1 \times 1 \times (-2) = (-1)(-1)(-2)$$

⑦에서 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이어야 하므로

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$$

$$\textcircled{\Delta} \text{에서 } p = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times 1 = -3$$

48. 실계수 사차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 의 네 개의 근 중에서
두 근 α, β 가 $\alpha + \beta = 2 + 3i$, $\alpha\beta = 5i$ 일 때, $\frac{e-b}{a}$ 의 값은?

① 25

② 26

③ 27

④ 28

⑤ 29

해설

$\alpha + \beta = 2 + 3i$, $\alpha\beta = 5i$ 이므로

α, β 는 모두 허수이다.

또한 방정식의 계수가 실수이므로

나머지 두 근은 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 이다.

따라서 $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}$ 가 네 근이 되므로

주어진 방정식은

$a(x - \alpha)(x - \bar{\alpha})(x - \beta)(x - \bar{\beta}) = 0$ 이 된다.

계수 비교를 통해

$\frac{e}{a}$ 는 네 근의 곱이 됨을 알 수가 있고

$-\frac{b}{a}$ 는 네 근의 합이 됨을 알 수 있다.

$$\therefore \frac{e-b}{a} = \alpha \times \bar{\alpha} \times \beta \times \bar{\beta} + (\alpha + \bar{\alpha} + \beta + \bar{\beta})$$

$$= (5i)(\bar{5i}) + (2 + 3i) + (\overline{2 + 3i}) = 29$$

49. 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 과 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a - b + c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

① -14

② -13

③ -12

④ -11

⑤ -9

해설

$1 + \sqrt{3}i$ 가 근이므로 $1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$$(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) + \alpha = -a \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i)\alpha + (1 - \sqrt{3}i)\alpha = b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)\alpha = -c \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 과의 공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

㉠에서 $\alpha = -a - 2$ 를 ㉣에 대입하면

$$(-a - 2)^2 + a(-a - 2) + 2 = 0$$

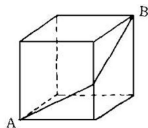
$$\therefore a = -3, \alpha = 1$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } b = 2\alpha + 4 = 6$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } c = -4\alpha = -4$$

$$\therefore a - b + c = -3 - 6 - 4 = -13$$

50. 다음 그림과 같이 모든 모서리의 합이 28 cm, 겉넓이가 28cm^2 , 부피가 8cm^3 인 직육면체가 있다. 이 직육면체에서 면을 따라 꼭지점 A에서 꼭짓점 B에 이르는 가장 짧은 거리는?



- ① 5cm ② 6cm ③ $2\sqrt{5}\text{cm}$
 ④ $\sqrt{29}\text{cm}$ ⑤ $\sqrt{37}\text{cm}$

해설

각 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$4(a + b + c) = 28$$

$$2(ab + bc + ca) = 28$$

$$abc = 8$$

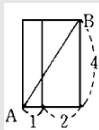
$$\therefore a + b + c = 7$$

$$ab + bc + ca = 14$$

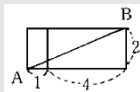
$$abc = 8$$

이 때, a, b, c 를 세 근으로 하는 x 에 대한 삼차방정식은 $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ $(x-1)(x-2)(x-4) = 0$ 그러므로 모서리의 길이는 각각 1cm, 2cm, 4cm 이다. 이제 꼭짓점 A 에서 꼭지점 B 에 이르는 거리를 전개도를 이용하여 구해 보자.

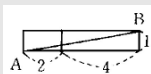
(i)



(ii)



(iii)



(i) 에서 $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm})$

(ii) 에서 $\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}(\text{cm})$

(iii) 에서 $\overline{AB} = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}(\text{cm})$

따라서 A 에서 B 에 이르는 가장 짧은 거리는 5cm