

1. 두 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라

하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1, 0)$ 이고

반지름의 길이는 1 이다.

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 2 = 0$ 에서

$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 16$ 이므로

이 원의 중심을 C_2 이라 하면

점 C_2 의 좌표는 $(3, 3)$ 이고

반지름의 길이는 4 이다.

$\overline{C_1C_2} = 5$ 이고

두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로

두 원은 서로 외접하게 된다.

따라서 공통접선은 3 개이다.

2. 점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q, 원점에 대하여 대칭이동한 점을 R 라 할 때, 세 점 P, Q, R 를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

점 P (2, 1) 을 x 축에 대하여 대칭이동

한

점 Q 는 Q (2, -1)

또, 점 P (2, 1) 을 원점에 대하여

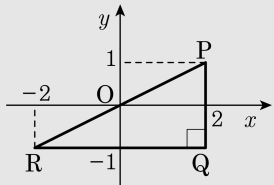
대칭이동한 점 R 는 R (-2, -1)

따라서, 다음 그림에서 세 점

P (2, 1), Q (2, -1), R (-2, -1) 을

꼭짓점으로 하는 $\triangle PQR$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



3. 점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

㉠ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$

㉡ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ 또는 $(x+4)^2 + (y-4)^2 = 16$

㉢ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3$ 또는 $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

㉣ $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 4$ 또는 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$

㉤ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5$ 또는 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

해설

점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하려면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 제2사분면에 있어야 한다.

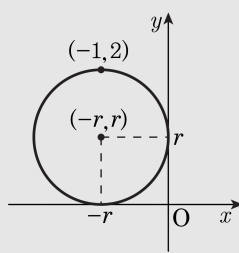
따라서, 반지름의 길이를 r 라고 하면 원의 중심은 $(-r, r)$ 이므로

구하는 원의 방정식을 $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 으로 놓을 수 있다.

이 때, 이 원이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$(-1+r)^2 + (2-r)^2 = r^2, \quad r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } r = 5$$



4. 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+m, y+n)$ 에 의하여 점 A (1, 2) 가 점 B 로 옮겨질 때, $AB = 4\sqrt{2}$ 이고 점 B 에서 직선 $x+y-3=0$ 에 이르는 거리가 $3\sqrt{2}$ 이다. 이때, mn 의 값은?

① -4

② -2

③ 2

④ 4

⑤ 6

해설

점 A (1, 2)를 x 축 방향으로 m 만큼,
 y 축 방향으로 n 만큼 평행이동한 점 B 는
 $B(1+m, 2+n)$ 이고,
선분 AB 의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로
 $\sqrt{m^2+n^2} = 4\sqrt{2} \quad \therefore m^2+n^2 = 32$
또한, 점 B 에서 직선 $x+y-3=0$ 에
이르는 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로
 $\frac{|1+m+2+n-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$
 $\therefore |m+n| = 6$
이 식의 양변을 제곱하면
 $m^2+2mn+n^2 = 36$
이 때, $m^2+n^2 = 32$ 이므로
 $2mn = 36-32 = 4 \quad \therefore mn = 2$

5. $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 6$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 최댓값은?

- ㉠ $3 + 2\sqrt{2}$
 ㉡ $2 + \sqrt{3}$
 ㉢ $3\sqrt{3}$
- ㉣ 6
 ㉤ $6 + 2\sqrt{3}$

해설

$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 6$ 은 중심이 $(3, 3)$, 반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원이고

$P(x, y)$ 에 대하여

$\frac{y}{x}$ 의 최댓값은 $\frac{y}{x} = k, y = kx$ 이므로

$\overline{OP}$ 의 기울기의 최댓값이다.

$y = kx$ 라 두고 원에 접하는 경우로 계산하면

$kx - y = 0$ 에서 중심 $(3, 3)$ 까지의 거리가 원의 반지름 $\sqrt{6}$ 과 같다.

$$\frac{|3k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \sqrt{6}, k^2 - 6k + 1 = 0$$

$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$ 이므로, 최댓값은 $3 + 2\sqrt{2}$ 이다.

