

1. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$ 가 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 최댓값 5, 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이고 $a < 0$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(x) = ax^2 - 2ax + b$$

$$= a(x-1)^2 - a + b \text{ 에서 } a < 0 \text{ 이고}$$

꼭짓점의 x 좌표 1이 $-2 \leq x \leq 2$ 에 속하므로

$x = 1$ 일 때 최댓값을 갖고,

$x = -2$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$\text{즉, } f(1) = -a + b = 5, f(-2) = 8a + b = -4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$

$$\therefore a + b = 3$$

2. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선이 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분한다. 이때, $3a + b$ 의 값은?

① 3

② 5

③ 7

④ 9

⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2$$

$$b-2 = 2(a-3), \quad b = 2a-4 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

AB를 2 : 1로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고,}$$

이 점은 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \frac{2b+2}{3} - 3 = 0,$$

$$a + 2b - 1 = 0 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{9}{5}, \quad b = -\frac{2}{5}$$

$$\therefore 3a + b = 5$$

3. 두 다항식 A, B 에 대하여 연산 $\Delta, \blacktriangledown$ 를 $A\Delta B = 2A + B$, $A\blacktriangledown B = A - 3B$ 로 정의한다.

$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$ 일 때 $A\blacktriangledown(B\Delta A)$ 를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$

② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$

③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$

④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$

⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A\blacktriangledown(B\Delta A) &= A\blacktriangledown(2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B 에 대입하여 정리한다.

4. x 에 관계없이 $\frac{x-a}{2x-b}$ 가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\frac{x-a}{2x-b} = k \text{라 놓으면,}$$

$$(2k-1)x + (a-bk) = 0$$

$$\therefore 2k-1=0, a=bk \text{이므로}$$

$$k = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}b \text{이다.}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 2$$

5. 다항식 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ 를 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 2 라고 한다. mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f(1) = 1 + m + n + 2 = 0, m + n = -3$$

$$f(-1) = -1 + m - n + 2 = 2, m - n = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = -1, n = -2$

$$\therefore mn = 2$$

6. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2(m + a + 2)x + m^2 + a^2 - 2b = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수의 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① 0

② 4

③ 2

④ -1

⑤ -3

해설

$$\text{중근 : } \frac{D}{4} = 0$$

m 값에 관계없이 성립 : m 에 대한 항등식

$$\frac{D}{4} = (a + m + 2)^2 - (m^2 + a^2 - 2b) = 0$$

$$m \cdot (2a + 4) + (4 + 4a + 2b) = 0$$

$$2a + 4 = 0, \quad a = -2$$

$$4 + 4a + 2b = 0, \quad b = 2$$

$$\therefore a + b = 0$$

7. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax - b$ 의 최댓값은 5 이고, 점 $(2, 5)$ 를 지난다.
 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$y = -x^2 + 4ax - b = -(x - 2a)^2 + 4a^2 - b ,$$

$$4a^2 - b = 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$y = -x^2 + 4ax - b$ 에 $(2, 5)$ 대입하면

$$b = 8a - 9 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$4a^2 - (8a - 9) = 5 , (a - 1)^2 = 0 ,$$

$$\therefore a = 1 , b = -1 ,$$

따라서 $a + b = 1 + (-1) = 0$ 이다.

8. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2(2x - 3) > x + 3 \\ 5x - 9 < 2(3x + 7) \end{cases}$$

▶ 답:

▷ 정답: $x > 3$

해설

$$\text{i) } 2(2x - 3) > x + 3$$

$$\Rightarrow 4x - 6 > x + 3$$

$$\Rightarrow x > 3$$

$$\text{ii) } 5x - 9 < 2(3x + 7)$$

$$\Rightarrow -x < 23$$

$$\Rightarrow x > -23$$

$$\therefore x > 3$$

9. 다음 세 부등식을 동시에 만족시키는 정수 x 의 개수는 모두 몇 개인가?

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad -\frac{3}{2}x + 6 \geq -9$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad 3(5 - x) + 4x \geq 5$$

$$\textcircled{\text{㉢}} \quad 0.4x + 1.2 > 0.9x - 0.8$$

① 10개

② 11개

③ 12개

④ 13개

⑤ 14개

해설

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad -\frac{3}{2}x + 6 \geq -9$$

$$\therefore x \leq 10$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \quad 3(5 - x) + 4x \geq 5$$

$$\therefore x \geq -10$$

$$\textcircled{\text{㉢}} \quad 0.4x + 1.2 > 0.9x - 0.8$$

$$\therefore x < 4$$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 정수는 14개이다.

10. 연립부등식 $5x + a > 4x + 3$, $3x + 8 \geq 4x + 2$ 의 해가 $-9 < x \leq 6$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$(i) \ 5x + a > 4x + 3, \ x > 3 - a$$

$$(ii) \ 3x + 8 \geq 4x + 2, \ x \leq 6$$

$3 - a < x \leq 6$ 과 $-9 < x \leq 6$ 이 같으므로

$$3 - a = -9$$

$$\therefore a = 12$$

11. 부등식 $|-x+3|+|2x-3|\leq 6$ 의 해가 $\alpha\geq x\geq\beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

① -4

② 0

③ 6

④ 12

⑤ 16

해설

$$|-x+3|+|2x-3|\leq 6$$

$$\text{i) } x\leq \frac{3}{2}$$

$$-x+3-2x+3\leq 6, \quad x\geq 0$$

$$\therefore 0\leq x\leq \frac{3}{2}$$

$$\text{ii) } \frac{3}{2}<x\leq 3$$

$$-x+3+2x-3\leq 6, \quad x\leq 6$$

$$\therefore \frac{3}{2}<x\leq 3$$

$$\text{iii) } x>3$$

$$x-3+2x-3\leq 6, \quad x\leq 4$$

$$\therefore 3<x\leq 4$$

$$\therefore 0\leq x\leq 4, \quad \alpha\beta=0$$

12. 부등식 $(a-1)x^2 - 2(a-1)x + 1 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $1 \leq a < 2$

② $2 < a$

③ $a < 1$

④ $0 < a \leq 1$

⑤ $1 < a < 2$

해설

i) $a = 1 \Rightarrow a > 0 \dots$ 성립

ii) $a \neq 1$ 모든 x 에 대해 성립하려면
판별식이 0보다 작아야한다.

$$\therefore D' = (a-1)^2 - (a-1) < 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a-2) < 0$$

$$\Rightarrow 1 < a < 2$$

i), ii)에 의해 $1 \leq a < 2$

13. x 에 관한 부등식 $(a-1)x^2 + (b+1)x + 6 > 0$ 의 해가 $-3 < x < 1$ 일 때, ab 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(a-1)x^2 + (b+1)x + 6 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$$

$$x^2 + \frac{b+1}{a-1}x + \frac{6}{a-1} < 0 \quad (a-1 < 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) < 0, \quad x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$\frac{b+1}{a-1} = 2, \quad \frac{6}{a-1} = -3$$

$$\therefore a = -1, b = -5$$

$$\therefore ab = 5$$

14. 직선 $3x + ay = 3a$ ($a > 0$) 의 그래프가 x 축, y 축과 만나서 이루어진 삼각형의 넓이가 3 일 때, a 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

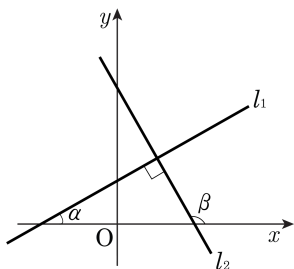
주어진 식의 양변을 $3a$ 로 나누면 $\frac{x}{a} + \frac{y}{3} = 1$

$\therefore x$ 절편이 a , y 절편이 3 이므로

$$S = \frac{1}{2} \times a \times 3 = 3$$

$\therefore a = 2$

15. 다음은 두 직선 $l_1 : y = m_1x + n_1$, $l_2 : y = m_2x + n_2$ 가 서로 수직일 조건을 구하는 과정이다.



두 직선 l_1 , l_2 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = (\text{가}), \quad \tan \beta = (\text{나})$$

$$\text{이때, } \beta = \alpha + (\text{다}) \text{ 이므로, } \tan \beta = \frac{1}{(\text{라})}$$

$$\therefore m_1 m_2 = (\text{마})$$

위

의 (가), (나), (다), (라), (마)에 알맞은 것이 잘못 짝지워진 것은?

① (가) m_1

② (나) m_2

③ (다) 90°

④ (라) $\tan \alpha$

⑤ (마) -1

해설

$$\tan \alpha = (l_1 \text{의 기울기}) = m_1$$

$$\tan \beta = (l_2 \text{의 기울기}) = m_2$$

$$\beta = \alpha + 90^\circ \text{이므로}$$

$$\tan \beta = (90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha = \frac{1}{-\tan \alpha}$$

$$\text{따라서 } m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$\text{즉, } m_1 m_2 = -1 \text{이다.}$$

16. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

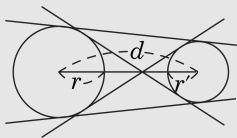
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r - r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r - r' = 1, d = 9$ 이므로

$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
4 개



17. 두 원 $x^2 + y^2 = 8^2$, $(x - 13)^2 + y^2 = 3^2$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① 10

② 12

③ 16

④ 20

⑤ 24

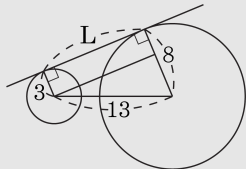
해설

중심사이 거리는 13 이고, 반지름 길이의 차는 5 이다.

두 원을 나타내면, 다음 그림과 같은 모양이다.

공통 외접선은 $L^2 = 13^2 - (8-3)^2 = 144$

$\therefore L = 12$



18. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$$x^2 + y^2 = 4, \quad y = x + 3$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 0 개

해설

원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + 3$ 까지의 거리를 d 라 하면,

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때, } d = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2 = r$$

이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

∴ 교점의 개수 : 0 개

19. 직선 $2x + ay + b = 0$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하였더니 직선 $3x + 2y - 6 = 0$ 과 x 축 위의 점에서 직교하였다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -16

② -13

③ -11

④ -9

⑤ -7

해설

직선 $2x + ay + b = 0$ 을

x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면,

$$2(x + 3) + a(y - 1) + b = 0$$

$$2x + ay - a + b + 6 = 0 \cdots \textcircled{7}$$

즉, 직선 $\textcircled{7}$ 의 기울기는 $-\frac{2}{a}$ 이고,

x 절편은 $\frac{a - b - 6}{2}$ 이다.

이 때, 직선 $\textcircled{7}$ 이 직선 $3x + 2y - 6 = 0$,

즉 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 과 x 절편이 같고

서로 직교하므로

$$(i) \frac{a - b - 6}{2} = 2$$

$$\therefore a - b = 10$$

$$(ii) -\frac{2}{a} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \quad \therefore a = -3$$

따라서 (i), (ii) 에서 $a = -3$, $b = -13$ 이므로

$$a + b = -3 + (-13) = -16$$

20. x 의 이차방정식 $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - m - 2 = 0$ 의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$D = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0$ 이므로
서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 근을 α , 2α 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = -(2m - 1) > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$m < -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, ㉠에서의 $\alpha = \frac{1 - 2m}{3}$ 을 ㉡에 대입하여 풀면 $m = -4, 5$

조건 ㉢에 의해서 $m = -4$