1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $i^2 = -1$

② $x^2 = -4$ 를 만족하는 실수는 존재하지 않는다.

③ $\sqrt{-9} = 3i$

④ 2는 복소수이다.

⑤ $a + bi$ 에서 $b = 0$ 이면 실수이다. (단, a, b 는 실수)

해설

④ $2 = 2 + 0 \cdot i$ 이므로 복소수이다.

2. 복소수 $\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}=\frac{(3+i)(1-i)+(1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{4-2i+(a+1)+(a-1)i}{2}$$
$$=\frac{a+5+(a-3)i}{2}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore\ a=3$

3. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 되도록 k 의 값을 정하면?

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$= 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

4. 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y+(xy-1)i=2+i$일 때 x^2+y^2의 값은?

① 4 ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ -1

해설

$x+y=2,\ xy-1=1 \quad \therefore xy=2$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=0$

5. 등식 $(1-2i)x+(2+i)y=4-3i$ 를 만족하는 실수 $x+y$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 8

해설

$(1-2i)x+(2+i)y=4+3i=0$ 에서
$(x+2y-4)+(-2x+y+3)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+2y-4=0$, $-2x+y+3=0$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$x=2,\ y=1$
$\therefore\ x+y=3$

6. $(1+3i)(1-3i)-(2-i)(3+i)$ 를 계산하면?

① $17-i$ ② $3+i$ ③ $3-i$ ④ $7+i$ ⑤ $7-i$

해설

$(1+3i)(1-3i)-(2-i)(3+i)$
$=\ (1+9)-(6-i+1)$
$=\ 3+i$

7. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{1-2i}{2+3i}+\frac{1+2i}{2-3i}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{8}{13}$

해설

(준식)

$=\frac{(1-2i)(2-3i)+(1+2i)(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\frac{(2-6)+(-4-3)i+(2-6)+(4+3)i}{2^2+3^2}$

$=\frac{(-4-7i)+(-4+7i)}{13}$

$=-\frac{8}{13}$

8. 실수 k 에 대하여 복소수 $z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z=2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$z=2(k-i)-k(1+i)^2$
$=2k-2i-2ki$
$=2k-(2+2k)i$

허수 부분이 0 이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

9. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$
순허수이므로 $2a^2+a-6=0$
$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3)=0$
$\Leftrightarrow \ a=-2$ 또는 $a=\frac{3}{2}$
그런데 $a=2$ 이면,
$a^2+4a+4=0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.
$\therefore \quad a=\frac{3}{2}$

10. $i^2 = -1$이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4개,

$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로

$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

11. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2\neq 0$ 이어야 하므로 $x\neq 2$
따라서 $x=-3$

12. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2)+2ai = 2i$
복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$
$\therefore\ a = 1$
$\therefore\ (1+ai)(1-ai) = (1+i)(1-i)$
$= 1-(-1)$
$= 2$

13. x, y가 실수일 때, $(1+i)x+(1-i)y=\dfrac{2-i}{1+i}$을 만족하는 x, y의 값은?

① $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ② $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$ ③ $x=1$, $y=-\dfrac{1}{2}$
④ $x=1$, $y=1$ ⑤ $x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$

해설

$(x+y)+(x-y)i=\dfrac{2-i}{1+i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$

$\Rightarrow\ x+y=\dfrac{1}{2},\ \ x-y=-\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow\ x=-\dfrac{1}{2},\ \ y=1$

14. 등식 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오
(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면
$a(1-i)+b(1+i)=-10$, $(a+b)+(b-a)i=-10$
$\therefore a+b=-10,\ b-a=0$

15. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때, $xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$　② $-1 - 2i$　③ $-1 + 2i$
④ $-1 - i$　⑤ $-1 + i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned} \therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i} \\ &= \frac{2+4i}{1-i} \\ &= -1+3i \end{aligned}$$

16. $\frac{5}{1+2i}=x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=-1$

해설

$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5(1-2i)}{5}=1-2i$

$1-2i=x+yi$

$x=1, y=-2, x+y=-1$

17. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = -\sqrt{-6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = 3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{10}$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = 6$

① ㉠,㉡ ② ㉢,㉣ ③ ㉠,㉣,㉤
④ ㉣,㉥ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣,㉥

해설

㉠ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-3} = \sqrt{2}i \times \sqrt{3}i = -\sqrt{6}$

㉡ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} = -3i$

㉢ $\sqrt{-27} - \sqrt{-3} = 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i$

㉣ $\dfrac{4}{\sqrt{-4}} = \dfrac{4}{2i} = -2i$

㉤ $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2}i \times \sqrt{5} = \sqrt{10}i$

㉥ $\sqrt{(-3)^2} + (\sqrt{-3})^2 = \sqrt{9} + (\sqrt{3}i)^2 = 0$

18. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$

$=a+bi$

따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

19. 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 (x, y)로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　② 1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

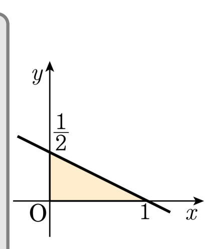
(준식) $=(2x-2y)+(x+2y-1)i=0$

$\therefore x+2y-1=0,$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $=\frac{1}{4}$



20. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선 ② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$\begin{aligned}(3-4i)\,z &= (3-4i)(x+yi)\\ &= (3x+4y)+(-4x+3y)\,i\end{aligned}$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \frac{4}{3}x$ ($\Rightarrow$ 기울기가 양인 직선)

21. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

22. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

(준식) $=\left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수
즉, $a^2+3a+2=0$
$a^2+2a\neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

23. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$
$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x+\sqrt{3}=2x,\ \sqrt{3}x-1=2$
$\therefore\ x=\sqrt{3}$

24. $i^2 = -1$ 일 때, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$(n+i)^4 = \left\{(n+i)^2\right\}^2 = (n^2 - 1 + 2ni)^2$
이것이 정수가 되려면 $n^2 - 1 + 2ni$ 가 정수가 되거나 순허수가 되어야 한다.
i) $n = 0$ 일 때 성립
ii) $n^2 - 1 = 0$, $n = \pm 1$ 일 때 성립
따라서 구하는 정수의 개수는 3개

해설

$(n+i)^4 = n^4 - 6n^2 + 1 + i(4n^3 - 4n)$
이것이 실수이려면, $4n^3 - 4n = 0$, $n = 0$, ± 1
이 때 $(n+i)^4$ 은 모두 정수가 되므로, $(n+i)^4$ 이 정수가 되도록 하는 정수 n 의 개수는 3 개다.

25. $z \cdot \overline{z} = 1$ 을 만족하는 복소수 z_1, z_2 에 대하여 $z_1 + z_2 = 2$ 일 때, $z_1 \cdot z_2$ 의 값은? (단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ 는 각각 z_1, z_2 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
(a, b, c, d 는 실수)로 놓으면
$\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ 이므로
$z_1 \cdot \overline{z_1} = 1$ 에서
$a^2 + b^2 = 1 \cdots$ ㉠
$z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$ 에서
$c^2 + d^2 = 1 \cdots$ ㉡
$z_1 + z_2 = 2$ 에서 $a + c + (b + d)i = 2$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a + c = 2,\ b + d = 0$
㉠ − ㉡을 하면
$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$
$(a + c)(a - c) + (b + d)(b - d) = 0$
그런데 $b + d$ 는 0이므로 $(a + c)(a - c) = 0$
$\therefore\ a = -c$ 또는 $a = c$
그런데 $a + c = 2$ 이므로 $a = c = 1$
㉠, ㉡에 $a = c$, $c = 1$ 을 각각 대입하면 $d = b = 0$
따라서 $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ 이므로
$z_1 \cdot z_2 = 1$