1. x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 + ax - 2y = 0$ 이 중심이 $\mathrm{C}(1, 1)$ 인 원을 나타낼 때, 이 원의 반지름의길이는?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

해설

$x^2+y^2+ax-2y = 0$ 을 표준형으로 고치면 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+(y-1)^2 = \frac{a^2+4}{4}$ 이므로

중심의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-\frac{a}{2},\ 1\right)$

반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$

$\therefore a = -2$

따라서 구하는 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다

2. 두 점 $A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$ 를 지름의 양끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

② $(x-1)^2+(y+1)^2=13$

③ $(x-1)^2+(y+1)^2=10$

④ $(x+1)^2+(y-1)^2=10$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

해설

$A(-3,\ 4)$, $B(1,\ -2)$가 지름의 양 끝점이므로
$\overline{AB}$ 의 중점이 원의 중심 $O(-1,\ 1)$ 이고,

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}=\mathrm{r}$$

반지름 $r=\overline{OA}=\sqrt{(-3+1)^2+(4-1)^2}$
$=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

$\therefore$ 원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-1)^2=13$

3. 방정식 $x^2+y^2-4x+2y+c=0$ 의 그래프가 원이 되도록 상수 c 의 값의 범위를 정하면?

① $c<1$ ② $c<2$ ③ $c<3$ ④ $c<4$ ⑤ $c<5$

해설

주어진 방정식을 변형하면

$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+2y+1\right)=5-c$

$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=5-c \quad \leftarrow \quad 5-c=r^2$

이 방정식의 그래프가 원이 되려면

$5-c>0 \quad \leftarrow \quad r^2>0$

$\therefore c<5$

4. x 축에 접하고 두 점 $(3,1)$, $(-4,8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$ ② $x^2+(y-5)^2=169$

③ $x^2+(y-5)^2=25$ ④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$

⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 (a,b) 라고 하면
x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3,1)$, $(-4,8)$ 을 지나므로
$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2\cdots\cdots$ ㉠
$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2\cdots\cdots$ ㉡
㉠ $-$ ㉡에서
$b=a+5\cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-8a=a(a-8)=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 $a=8$
㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+(y-5)^2=5^2$
또는$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

5. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2 + y^2 = 1, \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
㉡ $(x+1)^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + (y+3)^2 = 2$
㉢ $x^2 + y^2 = 2, \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$
㉣ $x^2 + y^2 = 4, \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$
㉤ $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

① ㉠ ② ㉠, ㉤ ③ ㉡

④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
$|r - r'| < d < |r + r'|$ 이어야 한다.
㉡ 만나지 않는다.
㉢ 내접한다.
㉣ 외접한다.

6. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

7. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하고 기울기가 1 인 접선의 방정식은 $y = x \pm$ (　　　　)이다. (　　　　)안의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$　　② $2\sqrt{2}$　　③ $3\sqrt{2}$　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

직선과 원이 접하면 원의 중심에서 직선에 이르는 거리는 반지름과 같다.

$y = x + k$ 라 하면

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2,\quad k = \pm 2\sqrt{2}$$

$\therefore\ y = x \pm 2\sqrt{2}$

8. 점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

② $(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 또는 $(x+4)^2+(y-4)^2=16$

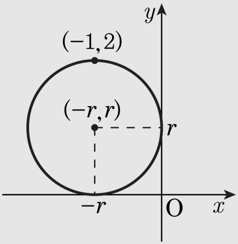
③ $(x-3)^2+(y-3)^2=3$ 또는 $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

④ $(x-4)^2+(y-4)^2=4$ 또는 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$

⑤ $(x-5)^2+(y-5)^2=5$ 또는 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

해설

점 $(-1, 2)$를 지나고 x축과 y축에 동시에 접하려면 오른쪽 그림과 같이 원의 중심이 제2사분면에 있어야 한다.
따라서, 반지름의 길이를 r라고 하면 원의 중심은 $(-r, r)$이므로
구하는 원의 방정식을 $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$으로 놓을 수 있다.
이 때, 이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로
$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$, $r^2-6r+5=0$
$\therefore r=1$ 또는 $r=5$



9. 점 A(4, 0)과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 넓이는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ π

해설

$x^2+y^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$ 라 하면
$A(4,0), P(a,b)$ 의 중점의 좌표 $M(x,y)$는
$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.
$\therefore\ x=\frac{a+4}{2},\quad y=\frac{b}{2}$
$\therefore\ a=2x-4,\ b=2y$
이 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$가 성립한다.
$(2x-4)^2+(2y)^2=4, (x-2)^2+y^2=1$
따라서 구하는 중점의 자취는 중심이 $(2,0)$,
반지름의 길이가 1인 원이므로
원이 넓이 S는 $S=\pi\cdot 1^2=\pi$

10. 두 점에서 만나는 두 원

$x^2+y^2-2y-3=0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2-4x+1=0 \cdots\cdots$ ㉡

과 x, y에 대한 방정식

$\left(x^2+y^2-2y-3\right)+k\left(x^2+y^2-4x+1\right)=0$(단, k는 실수) $\cdots\cdots$ ㉢

에 대하여 방정식 ㉢의 그래프는 실수 k의 값에 관계없이 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지남을 보이는 과정이다. (가) ~ (마) 에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

> 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 (α, β)라고 하면
> (가), (나)(←두 원은 모두 점 (α, β)를 지나므로)이므로
> 임의의 실수 k에 대하여
> (다) (←(α, β)를 ㉢에 대입한 것과 같은 식)이 성립한다.
> 따라서, (라) 의 그래프는 k의 값에 관계없이 (마),
> 즉, 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지난다.

① (가) : $\alpha^2+\beta^2-2\beta-3=0$

② (나) : $\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1=0$

③ (다) : $\left(\alpha^2+\beta^2-2\beta-3\right)+\left(\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1\right)=0$

④ (라) : ㉢

⑤ (마) : 점 (α, β)

해설

(α, β) 를 ㉢ 에 대입한 식은 $\left(\alpha^2+\beta^2-2\beta-3\right)+k\left(\alpha^2+\beta^2-4\alpha+1\right)=0$

11. 두 원 $x^2+y^2-2x+ky-4=0$, $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 의 공통현의 방정식이 직선 $y=x-1$ 과 수직일 때, k 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-2x+ky-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$

$2x+(k+2)y-8=0\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 직선 $y=x-1$,

즉 $x-y-1=0$ 이 수직이므로

$2\cdot 1+(k+2)(-1)=0 \quad \therefore k=0$

12. 실수 a, b 와 두 원

A : $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+1$,

B : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 에 대하여

원 A 가 원 B 의 둘레를 이등분하면서 지날 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a+b=-1$

② $a+b=1$

③ $a-b=0$

④ $a^2+b^2=1$

⑤ $(a-1)^2+(b-1)^2=1$

해설

원A 가 원B 의 둘레를 이등분하므로

두 원의 공통현이

원B 의 중심인 $(1,\ 1)$ 을 지나야 한다.

공통현의 방정식은

$(a-1)x+(b-1)y+1=0\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 점 $(1,\ 1)$ 을 지나므로

$(a-1)\times 1+(b-1)\times 1+1=0$

$\therefore a+b=1$

13. 중심이 C(1, 2) 이고, 직선 L : $x+2y=0$ 에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ ② $(x-1)^2+(y-2)^2=6$

③ $(x-1)^2+(y-2)^2=7$ ④ $(x-1)^2+(y-2)^2=8$

⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

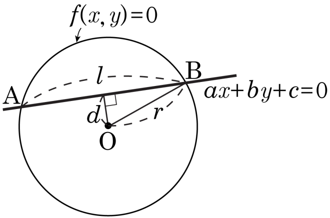
해설

중심에서 접선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

∴ 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

14. 원의 방정식 $f(x,y)=0$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 이 다음 그림과 같이 위치해 있을 때, 도형의 방정식 $f(x,y)+k(ax+by+c)=0$ 이 나타낼 수 있는 도형의 최소 넓이는?



① $\pi(r-d^2)$　② πr^2　③ $\pi\left(\frac{1}{2}l\right)^2$

④ $\pi(r^2+q^2)$　⑤ πl^2

해설

도형의 넓이가 최소일 때는 l 이 지름일 때 이므로

도형의 넓이는 $\pi\left(\frac{1}{2}l\right)^2$ 이 정답이다.

15. 점 $(0,\ 4)$를 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=\pm\sqrt{11}x+4$

② $y=\pm\sqrt{13}x+4$

③ $y=\pm\sqrt{14}x+4$

④ $y=\pm\sqrt{15}x+4$

⑤ $y=\pm\sqrt{17}x+4$

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(0,4)$를 지나는 접선의 방정식은 $y-4=mx$ 즉, $mx-y+4=0$

원의 중심 $(0,0)$로부터 이 직선까지의 거리가 반지름 1과 같아야 하므로

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}=1,4=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 풀면 $m^2=15$

$\therefore m=\pm\sqrt{15}$

따라서 $y=\pm\sqrt{15}x+4$