1. 다음 5 개의 수 A, B, C, D, E 가 정수가 되는 수 중 가장 작은 자연 수를 a, b, c, d, e 라 한다. 다음 중 옳은 것은?

$$A = \sqrt{4+a}, \quad B = \sqrt{5^2+b}$$

$$C = \sqrt{5^2 \times 3^3 \times c}, \quad D = \sqrt{160+2d}$$

- ① $a < b < c < d$ ② $a < c < b < d$ ③ $b < a < d < c$
 ④ $c < d < a < b$ ⑤ $c < a < b < d$

해설

정수가 되려면 근호 안의 수가 제곱수가 되어야 한다.

A 에서 $4+a = 9$ 일 때 a 가 가장 작은 수이면서 제곱수를 만든다.

$$\therefore a = 5$$

B 에서 $5^2 + b = 36$ 일 때 b 가 가장 작은 수이면서 제곱수를 만든다.

$$\therefore b = 11$$

C 에서 $5^2 \times 3^3 \times c$ 가 제곱수가 되려면 가장 작은 수는 $c = 3$ 일 때 이다.

D 에서 $160 + 2d = 196 (= 14^2)$ 일 때 d 가 가장 작은 수이면서 근호 안이 제곱수가 된다.

$$\therefore d = 18$$

$$\therefore c < a < b < d$$

2. 다음 중 각 식을 만족하는 x 의 값이 무리수인 것을 모두 고르면?

$$\text{㉠ } x^2 = 9$$

$$\text{㉡ } x^2 = 121$$

$$\text{㉢ } x^2 = \frac{16}{25}$$

$$\text{㉣ } x^2 = \frac{8}{49}$$

$$\text{㉤ } x^2 = 7$$

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉢

③ ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉤

⑤ ㉣, ㉤

해설

$$\text{㉠ } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{㉡ } x^2 = 121 \Rightarrow x = \pm 11$$

$$\text{㉢ } x^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow x = \pm \frac{4}{5}$$

$$\text{㉣ } x^2 = \frac{8}{49} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{8}}{7}$$

$$\text{㉤ } x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7}$$

3. $\sqrt{\frac{6}{128}}$ 을 근호 안의 수가 가장 작은 자연수가 되도록 하면 $\frac{\sqrt{a}}{b}$ 가 된다. 이 때, 자연수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 8

④ 11

⑤ 16

해설

$$\sqrt{\frac{6}{128}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{2^3 \times 4^2}} = \sqrt{\frac{3}{2^2 \times 4^2}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore a = 3, b = 8$$

$$\therefore a + b = 3 + 8 = 11$$

4. $\sqrt{3} = a$, $\sqrt{30} = b$ 일 때, $\sqrt{3000}$ 의 값과 같은 것은?

① $10b$

② $100b$

③ $\frac{1}{10}a$

④ $\frac{1}{10}b$

⑤ $\frac{1}{100}a$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{3000} &= \sqrt{30 \times 100} \\ &= \sqrt{30} \times \sqrt{100} \\ &= \sqrt{30} \times 10 \\ &= 10b\end{aligned}$$

5. 삼각형의 넓이가 $5\sqrt{21}$ 이고, 밑변의 길이가 $\sqrt{15}$ 일 때, 높이를 구하면?

- ① $\sqrt{35}$ ② $2\sqrt{35}$ ③ $3\sqrt{35}$ ④ $4\sqrt{35}$ ⑤ $5\sqrt{35}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{높이}) &= 5\sqrt{21} \times 2 \div \sqrt{15} \\ &= \frac{10\sqrt{21}}{\sqrt{15}} \\ &= \frac{10\sqrt{7}\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{5}} \\ &= \frac{10\sqrt{35}}{\sqrt{5}} \\ &= 2\sqrt{35}\end{aligned}$$

6. $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{6}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{15}}{\sqrt{5}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{10}$ 일 때, 유리수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① $-\frac{17}{10}$

② 0

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{13}{10}$

⑤ $\frac{23}{10}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{5} - \sqrt{6}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{15}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{6})\sqrt{5} - (\sqrt{2} - \sqrt{15})\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{5 - \sqrt{30} + \sqrt{30} - 2}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

$\therefore a = 0, b = \frac{3}{10}$ 이므로 $a + b = \frac{3}{10}$

7. $3x^2 - 14xy + 8y^2 = (ax + by)(cx + dy)$ 일 때, 네 정수 a, b, c, d 의 합 $a + b + c + d$ 의 값은?(단, $a > 0, c > 0$)

① -2

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$3x^2 - 14xy + 8y^2 = (3x - 2y)(x - 4y)$$

$$a = 3, b = -2, c = 1, d = -4$$

$$\therefore a + b + c + d = -2$$

8. 반지름의 길이의 비가 $1 : 3$ 인 두 원이 있다. 이 두 원의 넓이의 합이 $40\pi\text{cm}^2$ 일 때, 작은 원의 반지름의 길이는 몇 cm 인가?

① 1cm

② 2cm

③ 3cm

④ 4cm

⑤ 5cm

해설

작은 원의 반지름을 r 라고 하면, 큰 원의 반지름은 $3r$ 이다.

$$(\text{두 원의 넓이의 합}) = \pi r^2 + \pi(3r)^2 = 10\pi r^2 = 40\pi \text{ cm}^2$$

$$r^2 = 4$$

$$\therefore r = 2 \text{ cm } (\because r > 0)$$

9. $a < 0$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $-\sqrt{a^2} = -a$

㉡ $\sqrt{(3a)^2} = 3a$

㉢ $\sqrt{(-2a)^2} = -2a$

㉣ $-\sqrt{25a^2} = 5a$

㉤ $10\sqrt{100a^2} = 100a$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉣, ㉤

⑤ ㉢, ㉣

해설

$a < 0$ 이므로

㉠ $-\sqrt{a^2} = -(-a) = a$

㉡ $\sqrt{(3a)^2} = -3a$

㉤ $10\sqrt{100a^2} = 10\sqrt{(10a)^2}$
 $= 10 \times (-10a) = -100a$

10. 실수 a, b 에 대하여 $a < 0, 0 < b < 1$ 이다. $\sqrt{(-2a)^2} - \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(1-b)^2}$ 을 간단히 하였을 때 a, b 의 계수와 상수항의 합은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$a < 0, 0 < b < 1$ 이므로

$a - b < 0, 1 - b > 0$

$$\therefore \sqrt{(-2a)^2} - \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(1-b)^2}$$

$$= |-2a| - |a-b| + |1-b|$$

$$= -2a + a - b + 1 - b$$

$$= -a - 2b + 1$$

따라서 구하는 값은 $-1 - 2 + 1 = -2$ 이다.

11. $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ 일 때, $f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(99)+f(100)$ 의 값을 구하면?

① -1

② $\sqrt{101} - 1$

③ $\sqrt{102} - 1$

④ $\sqrt{102} - \sqrt{101}$

⑤ $\sqrt{102}$

해설

$$f(0) = \sqrt{2} - \sqrt{1} = -1 + \sqrt{2}$$

$$f(1) = \sqrt{3} - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$f(2) = \sqrt{4} - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + \sqrt{4} \cdots$$

$$f(99) = \sqrt{101} - \sqrt{100} = -\sqrt{100} + \sqrt{101}$$

$$f(100) = \sqrt{102} - \sqrt{101} = -\sqrt{101} + \sqrt{102}$$

$$\therefore f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(99) + f(100)$$

$$= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + -\sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots - \sqrt{100} + \sqrt{101} - \sqrt{101} + \sqrt{102}$$

$$= -1 + (\sqrt{2} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{3}) + (\sqrt{4} + \cdots - \sqrt{100}) + (\sqrt{101} - \sqrt{101}) + \sqrt{102}$$

$$= -1 + (0) + (0) + (0) + \sqrt{102}$$

$$= -1 + \sqrt{102}$$

12. 다음 중 $\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$ 의 분모를 유리화한 것은?

① $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

② $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

③ $\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

④ $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3}$

해설

$\sqrt{2} - \sqrt{3} = A$ 라 하면

$$\frac{1 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{1 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 - A}{1 + A} = \frac{(1 - A)^2}{(1 + A)(1 - A)} = \frac{A^2 - 2A + 1}{1 - A^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 1}{1 - (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{(2 - 2\sqrt{6} + 3) - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 1}{1 - (2 - 2\sqrt{6} + 3)}$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} - 4}$$

$$= \frac{(6 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{6} + 4)}{(2\sqrt{6} - 4)(2\sqrt{6} + 4)}$$

$$= \frac{12\sqrt{6} + 24 - 24 - 8\sqrt{6} - 4\sqrt{12} - 8\sqrt{2}}{24 - 16}$$

$$+ \frac{4\sqrt{18} + 8\sqrt{3}}{24 - 16}$$

$$= \frac{4\sqrt{6} + 4\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

13. $(x-1)^2 + \frac{1}{(x-1)^2} - 2$ 를 인수분해하면?

① $\frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2}$

② $\frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2}$

③ $\frac{x^2(x-2)^2}{(x-1)}$

④ $\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2}$

⑤ $\frac{x^2(x-2)^2}{(x-1)^2}$

해설

$x-1 = a$ 로 치환하면

$$(x-1)^2 + \frac{1}{(x-1)^2} - 2$$

$$= a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(\frac{a^2 - 1}{a}\right)^2$$

$$= \left\{ \frac{(a+1)(a-1)}{a} \right\}^2$$

$$= \frac{x^2(x-2)^2}{(x-1)^2}$$

14. $x^4 - 13x^2 + 36$ 을 인수분해했을 때, 일차식으로 이루어진 인수들의 합을 구하면?

① $4x + 13$

② $4x$

③ $4x - 13$

④ $2x^2 - 13$

⑤ $2x^2 + 5$

해설

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$$

$$= (x + 3)(x - 3)(x + 2)(x - 2)$$

∴ (일차식 인수들의 합)

$$= x + 3 + x - 3 + x + 2 + x - 2 = 4x$$

15. $x = \frac{1}{5 - 3\sqrt{3}}$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값으로 알맞은 것을 고르면?

① $\frac{130 + 75\sqrt{5}}{2}$

② $\frac{130 + 75\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{130 - 45\sqrt{3}}{2}$

④ $\frac{130 + 75\sqrt{3}}{3}$

⑤ $\frac{120 + 75\sqrt{3}}{2}$

해설

$$x = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{(5 - 3\sqrt{3})(5 + 3\sqrt{3})} = \frac{5 + 3\sqrt{3}}{-2}$$

$$\frac{1}{x} = 5 - 3\sqrt{3},$$

$$x^2 = \frac{52 + 30\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{1}{x^2} = 52 - 30\sqrt{3}$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{260 - 90\sqrt{3}}{4} = \frac{130 - 45\sqrt{3}}{2}$$