1. $16a^4 - 250ab^3$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① a ② $2a - 5b$

③ $2a(2a - 5b)$ ④ $4a^2 + 10ab + 25b^2$

⑤ $2a(2a + 5b)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2a(8a^3 - 125b^3)\\ &= 2a\{(2a)^3 - (5b)^3\}\\ &= 2a(2a - 5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)\end{aligned}$$

2. $x^4 - 3x^2 + 1$을 인수분해 하면?

① $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$
② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
③ $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - x - 1)$
④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x - 1)$
⑤ $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 - 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

3. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x+y+z=1$을 변형하면

(준식) $=(1-z)(1-x)(1-y)$

$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$

$=1-1+2-3=-1$

4. x에 대한 두 다항식 $A = x^2 + 3x + k$, $B = x^2 + x - k$의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 k의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$A - B = 2x + 2k = 2(x + k)$
A, B의 최대공약수는 $A - B$의 인수이므로
A, B의 최대공약수를 G라 하면
G는 일차식이므로 $G = x + k$
$x + k$는 A의 인수이어야 하므로
$(-k)^2 + 3(-k) + k = 0$
$\therefore\ k = 0$ 또는 $k = 2$
그런데 주어진 조건에서 $k \neq 2$이므로 $k = 2$

5. 이차항의 계수가 1인 두 다항식 A, B의 최대공약수가 $x+1$이고, 최소공배수가 x^3-3x-2일 때, $A+B$를 구하면?

① $(x-1)(x+1)$ ② $(x-1)(2x+1)$

③ $(x-1)(2x-1)$ ④ $(x+1)(2x-1)$

⑤ $(x+1)(2x+1)$

해설

$A=Ga$, $B=Gb$(a , b는서로소), $L=Gab$

$$L=x^3-3x-2=(x+1)(x^2-x-2)$$
$$=(x+1)(x-2)(x+1)$$
$$A+B=(x+1)(x+1)+(x+1)(x-2)$$
$$=(x+1)(x+1+x-2)=(x+1)(2x-1)$$

6. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　　② $2^{32}+1$　　③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$　　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$
\begin{aligned}
P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1) \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= \quad \vdots \\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\
&= 2^{32}-1
\end{aligned}
$$

7. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

① $100^6 - 1$　　② $100^6 + 1$　　③ $100^9 - 1$

④ $100^9 + 1$　　⑤ 1

해설

$100 = a$로 치환 하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)\\ &= \left(a^3-1\right)\left(a^3+1\right)\\ &= a^6-1\\ &= 100^6-1\end{aligned}$$

8. 실수 x가 $x^2-3x+1=0$을 만족할 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18　　② 19　　③ 20　　④ 21　　⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3\times3=18$$

9. 대각선의 길이가 28 이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176 인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은 ?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$
$= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$= a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를
각각 $a,\ b,\ c$ 라 하면 대각선의 길이는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 28$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = 28^2 \cdots$ ㉠
또, 모든 모서리의 길이의 합은 176 이므로
$4(a+b+c) = 176$
$\therefore\ a+b+c = 44 \cdots$ ㉡
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$ 이므로
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉢
따라서 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152 이다.

10. $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2^{24}　　④ 2^{25}　　⑤ 2^{50}

해설

$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$

$x=1$을 양변에 대입하면

$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots$ ①

$x=-1$을 양변에 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots$ ②

① + ②: $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$

$a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50} = 0$

11. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0일 때, 상수 a, b, c의 곱을 구하면?

① 8　② -8　③ 12　④ -12　⑤ 16

해설

$f(x) = (x-a)(x+b)P(x) + x + 2 \cdots$ ①
$\quad = (x+b)(x-c)Q(x) - x + 4 \cdots$ ②
$\quad = (x-c)(x-a)R(x) \cdots$ ③

나머지 정리에 의해

i) ① 에서 $f(a) = a + 2$, ③ 에서
$f(a) = 0$
$\Rightarrow a = -2$

ii) ① 에서 $f(-b) = -b + 2$, ② 에서
$f(-b) = b + 4$
$\Rightarrow b = -1$

iii) ② 에서 $f(c) = -c + 4$, ③ 에서
$f(c) = 0$
$\Rightarrow c = 4$
$\therefore abc = 8$

12. 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0$, $g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$　② $x-1$　③ $-x+1$
④ $-x-1$　⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면
$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$
$g(\sqrt{2}+1)=f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b$
$=a(\sqrt{2}+1)+b$ ($\because$ $f(\sqrt{2}+1)=0$)
$\therefore$ $a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$
$\therefore$ $a=1$, $b=1$
따라서 구하는 나머지는 $x+1$

13. x, y, z가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z가 빗변인 직각삼각형
② x가 빗변인 직각삼각형
③ $x=y$인 이등변삼각형
④ $y=z$인 이등변삼각형
⑤ $z=x$인 이등변삼각형

해설

$xz^2-yz^2+yx^2+zx^2-zy^2-xy^2=0$
$(x-y)z^2+(x^2-y^2)z+(x-y)xy=0$
$(x-y)\{z^2+(x+y)z+xy\}=0$
$(x-y)(z+x)(z+y)=0 \therefore x=y$ ($\because x,\ y,\ z$는 모두 양수)
$\therefore\ x=y$인 이등변삼각형

14. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 합이 $2x^2+2x$ 이고, 최소공배수가 x^3+x^2-9x-9 일 때, $f(1)g(1)$ 의 값은?

① -32　② -24　③ -16　④ -12　⑤ -8

해설

$f(x), g(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면
$f(x) = Ga, g(x) = Gb$ (a, b는 서로소)
$f(x) + g(x) = G(a+b) = 2x^2 + 2x = 2x(x+1)$
최소공배수 $Gab = x^3 + x^2 - 9x - 9$
$= (x+1)(x+3)(x-3)$
이상에서 $G = x + 1$ 이고 $ab = (x-3)(x+3)$
따라서 $f(x)g(x) = G^2ab = (x+1)^2(x+3)(x-3)$
$\therefore\ f(1)g(1) = -32$

15. 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.' 를 보이는 과정이다.

> $A,\ B$ 의 최대공약수를 G 라 하면,
> $A = Ga,\ B = Gb$ (단, $a,\ b$ 는 서로소) 로 나타낼 수 있다.
> A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
> $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
> $\therefore\ R = G(a - bQ)$
> 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
> 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
> (가) m (일차이상의 다항식) 이 존재하여
> $b = mk,\ a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
> $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
> 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
> a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
> 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
> $B = Gb,\ R = G(a - bQ)$ 에서
> b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

(　) 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수　　② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수　　④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

해설

$A,\ B$ 의 최대공약수를 G 라 하면
$A = Ga,\ B = Gb$ (단, $a,\ b$ 는 서로소) 이고,
A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
$A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 m 이 존재하여
$b = mk,\ a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
$B = Gb,\ R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.