

1. $16a^4 - 250ab^3$ 의 인수가 아닌 것은?

① a

② $2a - 5b$

③ $2a(2a - 5b)$

④ $4a^2 + 10ab + 25b^2$

⑤ $2a(2a + 5b)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2a(8a^3 - 125b^3) \\&= 2a\{(2a)^3 - (5b)^3\} \\&= 2a(2a - 5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)\end{aligned}$$

2. $x^4 - 3x^2 + 1$ 을 인수분해 하면?

- ① $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ ② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
③ $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - x - 1)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x - 1)$
⑤ $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^2 + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)\end{aligned}$$

3. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값은?

①

-1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$x + y + z = 1$ 을 변형하면

$$(\text{준식}) = (1 - z)(1 - x)(1 - y)$$

$$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$$

$$= 1 - 1 + 2 - 3 = -1$$

4. x 에 대한 두 다항식 $A = x^2 + 3x + k$, $B = x^2 + x - k$ 의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 k 의 값은? (단, $k \neq 0$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$A - B = 2x + 2k = 2(x + k)$$

A , B 의 최대공약수는 $A - B$ 의 인수이므로

A , B 의 최대공약수를 G 라 하면

G 는 일차식이므로 $G = x + k$

$x + k$ 는 A 의 인수이어야 하므로

$$(-k)^2 + 3(-k) + k = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 주어진 조건에서 $k \neq 0$ 이므로 $k = 2$

5. 이차항의 계수가 1 인 두 다항식 A, B 의 최대공약수가 $x + 1$ 이고, 최소공배수가 $x^3 - 3x - 2$ 일 때, $A + B$ 를 구하면?

① $(x - 1)(x + 1)$

② $(x - 1)(2x + 1)$

③ $(x - 1)(2x - 1)$

④ $(x + 1)(2x - 1)$

⑤ $(x + 1)(2x + 1)$

해설

$$A = Ga, \quad B = Gb(a, b \text{는 서로소}), \quad L = Gab$$

$$L = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2)$$

$$= (x + 1)(x - 2)(x + 1)$$

$$A + B = (x + 1)(x + 1) + (x + 1)(x - 2)$$

$$= (x + 1)(x + 1 + x - 2) = (x + 1)(2x - 1)$$

6. $P = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32} - 1$

② $2^{32} + 1$

③ $2^{31} - 1$

④ $2^{31} + 1$

⑤ $2^{17} - 1$

해설

주어진 식에 $(2 - 1) = 1$ 을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$P = (2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$= \vdots$$

$$= (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)$$

$$= 2^{32} - 1$$

7. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

① $100^6 - 1$

② $100^6 + 1$

③ $100^9 - 1$

④ $100^9 + 1$

⑤ 1

해설

$100 = a$ 로 치환 하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (a - 1)(a + 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) \\&= (a^3 - 1)(a^3 + 1) \\&= a^6 - 1 \\&= 100^6 - 1\end{aligned}$$

8. 실수 x 가 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① 18

② 19

③ 20

④ 21

⑤ 22

해설

준식의 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

9. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은 ?

$$\textcircled{1} \quad (x-a)(x-b)(x-c) \\ = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \\ = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$\textcircled{3} \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\textcircled{4} \quad (x+a)(x+b)(x+c) \\ = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

$$\textcircled{5} \quad (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ = a^3+b^3+c^3-3abc$$

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a , b , c 라 하면 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 28$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 28^2 \dots \textcircled{㉠}$$

또, 모든 모서리의 길이의 합은 176이므로

$$4(a+b+c) = 176$$

$$\therefore a+b+c = 44 \dots \textcircled{㉡}$$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$ 이므로

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \dots \textcircled{㉢}$$

따라서 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152이다.

10. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2^{24}

④ 2^{25}

⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

11. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$ 로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0 일 때, 상수 a, b, c 의 곱을 구하면?

① 8

② -8

③ 12

④ -12

⑤ 16

해설

$$f(x) = (x-a)(x+b)P(x) + x+2 \cdots \textcircled{1}$$

$$= (x+b)(x-c)Q(x) - x+4 \cdots \textcircled{2}$$

$$= (x-c)(x-a)R(x) \cdots \textcircled{3}$$

나머지 정리에 의해

i) ① 에서 $f(a) = a+2$, ③ 에서

$$f(a) = 0$$

$$\Rightarrow a = -2$$

ii) ① 에서 $f(-b) = -b+2$, ② 에서

$$f(-b) = b+4$$

$$\Rightarrow b = -1$$

iii) ② 에서 $f(c) = -c+4$, ③ 에서

$$f(c) = 0$$

$$\Rightarrow c = 4$$

$$\therefore abc = 8$$

12. 함수 $f(x) = x^2 + px + q$ 와 $g(x)$ 는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1) = 0$, $g(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 나머지는?



① $x + 1$

② $x - 1$

③ $-x + 1$

④ $-x - 1$

⑤ $2x + 1$

해설

$g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$g(x) = f(x)Q(x) + ax + b$$

$$\begin{aligned} g(\sqrt{2}+1) &= f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1) + a(\sqrt{2}+1) + b \\ &= a(\sqrt{2}+1) + b \quad (\because f(\sqrt{2}+1) = 0) \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + a\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

따라서 구하는 나머지는 $x + 1$

13. x, y, z 가 삼각형의 세 변의 길이이고, $xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$ 을 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① z 가 빗변인 직각삼각형

② x 가 빗변인 직각삼각형

③ $x = y$ 인 이등변삼각형

④ $y = z$ 인 이등변삼각형

⑤ $z = x$ 인 이등변삼각형

해설

$$xz^2 - yz^2 + yx^2 + zx^2 - zy^2 - xy^2 = 0$$

$$(x - y)z^2 + (x^2 - y^2)z + (x - y)xy = 0$$

$$(x - y)\{z^2 + (x + y)z + xy\} = 0$$

$$(x - y)(z + x)(z + y) = 0. \therefore x = y \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수})$$

$\therefore x = y$ 인 이등변삼각형

14. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 의 합이 $2x^2 + 2x$ 이고, 최소공배수가 $x^3 + x^2 - 9x - 9$ 일 때, $f(1)g(1)$ 의 값은?

① -32

② -24

③ -16

④ -12

⑤ -8

해설

$f(x), g(x)$ 의 최대공약수를 G 라 하면

$f(x) = Ga, g(x) = Gb$ (a, b 는 서로소)

$f(x) + g(x) = G(a + b) = 2x^2 + 2x = 2x(x + 1)$

최소공배수 $Gab = x^3 + x^2 - 9x - 9$

$$= (x + 1)(x + 3)(x - 3)$$

이상에서 $G = x + 1$ 이고 $ab = (x - 3)(x + 3)$

따라서 $f(x)g(x) = G^2ab = (x + 1)^2(x + 3)(x - 3)$

$\therefore f(1)g(1) = -32$

15. 다음은 유클리드 호제법 ‘두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나누 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.’를 보이는 과정이다.

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,

$A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)로 나타낼 수 있다.

A 를 B 로 나누는 몫을 Q 라 하면

$$A = BQ + R \text{ 에서 } Ga = GbQ + R$$

$$\therefore R = G(a - bQ)$$

즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.

한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면

(가) m (일차이상의 다항식)이 존재하여

$b = mk, a - bQ = mk'$ 이 성립한다.

$$a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$$

즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로

a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.

$$B = Gb, \quad R = G(a - bQ) \text{ 에서}$$

b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

()안의 (가), (나)에 알맞은 것은?

- ① 공약수, 공약수

- ② 공약수, 서로소

- ③ 공약수, 공배수

- ④ 공배수, 서로소

- ⑤ 공배수, 공약수

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면

$A = Ga, B = Gb$ (단, a, b 는 서로소)이고,

A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면

$$A = BQ + R \text{ 에서 } Ga = GbQ + R$$

$$\therefore R = (a - bQ)G$$

즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.

한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면

공약수인 m 이 존재하여

$$b = mk, \quad a - bQ = mk'$$

$$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$$

즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.

따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.

$B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.