

1. 점 A(2, 3)에서 두 점 B(-1, 3), C(3, 7)을 이은 선분 BC에 내린 수선의 발을 M(a, b)라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7

② 9

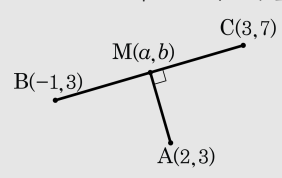
③ 11

④ 13

⑤ 15

해설

$\overline{BC} \perp \overline{AM}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.



$$\frac{7-3}{3-(-1)} \times \frac{b-3}{a-2} = -1$$

$$b - 3 = -(a - 2), \quad \therefore a + b = 5 \cdots \textcircled{7}$$

한편, 직선 BC의 방정식은

$$y - 3 = \frac{7 - 3}{3 - (-1)}(x + 1)$$

$$\therefore y = x + 4$$

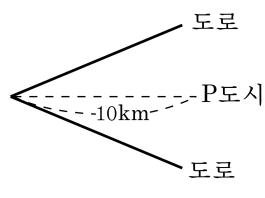
이 때, 점 M 이 $\overline{BC}$ 위의 점이므로

$$b = a + 4 \dots \textcircled{\text{L}}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{9}{2}$

$$\therefore 4ab = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = 9$$

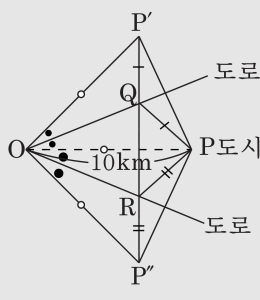
2. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 45° 의 각도로 교차하고 있다. 두 도로의 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



- ① $10\sqrt{2}$ km ② $12\sqrt{2}$ km ③ $14\sqrt{2}$ km
 ④ $16\sqrt{2}$ km ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

두 도로에 대한 점 P의 대칭점을 각각 P' , P'' 이라 하면, $\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = \overline{P'Q} + \overline{QR} + \overline{RP''} \geq \overline{P'P''}$
 두 길의 교점을 O라 하면
 $\overline{PO} = \overline{P'O} = \overline{P''O} = 10$ 이고
 두 도로가 이루는 각이 45° 이므로
 $\angle P'OP'' = 90^\circ$
 따라서 피타고라스 정리에 의하여 새로운 도로의 합의 최솟값은 $\overline{P'P''} = 10\sqrt{2}$ km 이다.



3. 평면 위에서 질량이 같은 질점들을 한 점을 중심으로 가장 쉽게 회전시키려면 각 점으로부터 회전중심까지의 거리의 제곱의 합이 가장 작아야 한다. 평면 위의 점 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 1)$ 에 각각 질량이 같은 질점이 놓여 있을 때 이들 세 질점을 가장 쉽게 회전시키는 회전 중심 P 의 좌표는?

- ① $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

② $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

③ $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
- ④ $P(1, \frac{1}{2})$

⑤ $P(2, \frac{1}{2})$

해설

$$P(x, y) \text{ 라고 하면 } \overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = x^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 = 3x^2 - 8x + 3y^2 - 2y + 9 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$$

이 값을 최소가 되게 하는 점 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.

4. 좌표평면 위의 네 점 $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, (a, b) 로 이루어진 사각형이 평행사변형이 될 때, 다음 <보기> 중 (a, b) 가 될 수 있는 좌표의 개수는?

보기

- | | | |
|-------------|-------------|------------|
| ㉠ $(2, 2)$ | ㉡ $(1, 2)$ | ㉢ $(0, 0)$ |
| ㉤ $(-4, 2)$ | ㉥ $(-2, 2)$ | ㉦ $(0, 3)$ |

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

평행사변형을 □ABCD 라 하면, 점 A, B, C, D를 어떻게 잡느냐에 따라 (a, b) 의 좌표가 달라진다.
<보기> 의 좌표를 하나씩 찍어보면 평행사변형이 되는 경우는 $(2, 2)$, $(0, 0)$, $(-2, 2)$ 3 가지가 있다.

5. 실계수 이차 방정식 $ax^2 + (a + b)x + b = 0$ 이 증근을 가질 때 점 $P(a^2 + b^2, a^2b^2)$ 의 자취의 방정식을 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x^2 (x > 0)$

② $y = \frac{1}{3}x^2 (x > 0)$

③ $y = \frac{1}{4}x^2 (x > 0)$

④ $y = \frac{1}{5}x^2 (x > 0)$

⑤ $y = \frac{1}{6}x^2 (x > 0)$

해설

$ax^2 + (a + b)x + b = 0$ 이 증근을 가지므로

$$D = (a + b)^2 - 4ab = 0, \quad a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0, \quad (a - b)^2 = 0$$

$$\therefore a = b$$

점 $P(a^2 + b^2, a^2b^2)$ 에서 $a^2 + b^2 = x$, $a^2b^2 = y$ 로 놓으면

$$x^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = 4a^2b^2$$

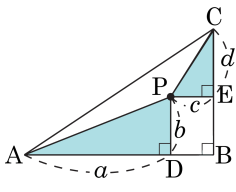
$$\therefore x^2 = 4y$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x^2$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $x = a^2 + b^2 > 0$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x^2 \quad (x > 0)$$

6. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형의 내부에 한 점 P를 잡고, 점 P에서 선분 AB, BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 한다. $\overline{AD} = a$, $\overline{DP} = b$, $\overline{PE} = c$, $\overline{EC} = d$ 라 할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?



보기

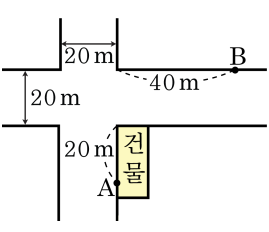
- ㉠ $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ ㉡ $\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c}$ ㉢ $\frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

선분 AP의 기울기는 $\frac{b}{a}$,
 선분 PC의 기울기는 $\frac{d}{c}$,
 선분 AC의 기울기는 $\frac{b+d}{a+c}$ 이므로
 $\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$ 가 성립한다.
 따라서 옳은 내용은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

7. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)
- ① $2\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{10}$ ③ $6\sqrt{5}$
 ④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{3}$



해설

그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는 좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는

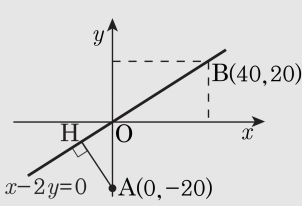
각각 $(0, -20)$, $(40, 20)$ 이다. 이 때, 원점과

점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x - 2y = 0$

이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할

최소거리는 점 A 와 직선 $x - 2y = 0$

사이의 거리이다. $\therefore \overline{AH} = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot (-20)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 8\sqrt{5}$



8. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 A(0, 5) 와 B(8, 1) 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \leq a \leq 8$)

- ① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 = 0$$

이 원이 두 점 A(0, 5), B(8, 1) 을 지나므로

$$a^2 - 10b + 25 = 0, a^2 - 16a - 2b + 65 = 0$$

두 식을 연립하면

$$4a^2 - 80a + 300 = 0, 4(a-5)(a-15) = 0$$

그런데

$0 \leq a \leq 8$ 이므로 $a = 5, b = 5$ 이다.

이 때, 직선 AB 의 방정식은

$$y - 5 = \frac{1-5}{8-0}(x-0)$$

$$\therefore x + 2y - 10 = 0$$

따라서 원의 중심 (5, 5) 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|5 + 2 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

9. 이차곡선 $x^2 + y^2 + ax + by + 7 = 0$ 이 반지름 1 인 원을 표시한다. 이
원의 중심 a, b 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $3\sqrt{2}\pi$ ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 28}{4}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - 28}{4} = 1 \text{ 에서}$$

$$a^2 + b^2 = 32 \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{중심 } \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \text{ 에서}$$

$$x = -\frac{a}{2}, y = -\frac{b}{2} \text{ 이므로}$$

$$a = -2x, b = -2y \text{ 를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면}$$

$$4x^2 + 4y^2 = 32 \quad \therefore x^2 + y^2 = 8$$

$$\therefore 2\pi r = 4\sqrt{2}\pi$$