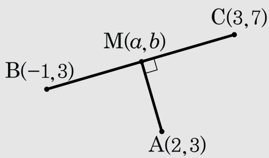
1. 점 A(2, 3) 에서 두 점 B(−1, 3) , C(3, 7) 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 M(a, b) 라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 −1 이다.



즉, $\dfrac{7-3}{3-(-1)} \times \dfrac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2)$,　$\therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC 의 방정식은

$y-3 = \dfrac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

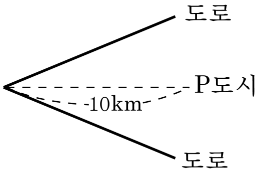
이 때, 점 M 이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = 9$

2. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 $45°$의 각도로 교차 하고 있다. 두 도로의 교차점에서 $10\,\mathrm{km}$ 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



① $10\sqrt{2}\,\mathrm{km}$ ② $12\sqrt{2}\,\mathrm{km}$ ③ $14\sqrt{2}\,\mathrm{km}$

④ $16\sqrt{2}\,\mathrm{km}$ ⑤ $18\sqrt{2}\,\mathrm{km}$

해설

두 도로에 대한 점 P 의 대칭점을 각각 $\mathrm{P'}$, $\mathrm{P''}$ 이라 하면, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{P'Q}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP''}}\geq\overline{\mathrm{P'P''}}$

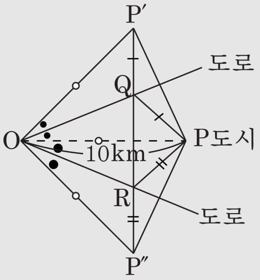
두 길의 교점을 O 라 하면

$\overline{\mathrm{PO}}=\overline{\mathrm{P'O}}=\overline{\mathrm{P''O}}=10$ 이고

두 도로가 이루는 각이 $45°$ 이므로

$\angle\mathrm{P'OP''}=90°$

따라서 피타고라스 정리에 의하여 새로운 도로의 합의 최솟값은 $\overline{\mathrm{P'P''}}=10\sqrt{2}\,\mathrm{km}$ 이다.



3. 평면 위에서 질량이 같은 질점들을 한 점을 중심으로 가장 쉽게 회전시키려면 각 점으로부터 회전중심까지의 거리의 제곱의 합이 가장 작아야 한다. 평면 위의 점 O(0, 0), A(2, 0), B(2, 1)에 각각 질량이 같은 질점이 놓여 있을 때 이들 세 질점을 가장 쉽게 회전시키는 회전중심 P의 좌표는?

① $P(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ② $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ ③ $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
④ $P(1, \frac{1}{2})$ ⑤ $P(2, \frac{1}{2})$

해설

$P(x,\ y)$ 라고 하면 $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=x^2+y^2+(x-2)^2+y^2+(x-2)^2+(y-1)^2=3x^2-8x+3y^2-2y+9=3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

이 값을 최소가 되게 하는 점 $P(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이다.

4. 좌표평면 위의 네 점 $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, (a, b) 로 이루어진 사각형이 평행사변형이 될 때, 다음<보기> 중 (a, b) 가 될 수 있는 좌표의 개수는?

보기

㉠ $(2, 2)$	㉡ $(1, 2)$	㉢ $(0, 0)$
㉣ $(-4, 2)$	㉤ $(-2, 2)$	㉥ $(0, 3)$

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

평행사변형을 □ABCD 라 하면, 점 A, B, C, D 를 어떻게 잡느냐에 따라 (a, b) 의 좌표가 달라진다.
<보기> 의 좌표를 하나씩 찍어보면 평행사변형이 되는 경우는 (2, 2), (0, 0), (−2, 2) 3 가지가 있다.

5. 실계수 이차 방정식 $ax^2+(a+b)x+b=0$ 이 중근을 가질 때 점 $\mathrm{P}(a^2+b^2,\ a^2b^2)$ 의 자취의 방정식을 구하면?

① $y=\frac{1}{2}x^2(x>0)$ ② $y=\frac{1}{3}x^2(x>0)$

③ $y=\frac{1}{4}x^2(x>0)$ ④ $y=\frac{1}{5}x^2(x>0)$

⑤ $y=\frac{1}{6}x^2(x>0)$

해설

$ax^2+(a+b)x+b=0$ 이 중근을 가지므로

$D=(a+b)^2-4ab=0$, $a^2+2ab+b^2-4ab=0$

$a^2-2ab+b^2=0$, $(a-b)^2=0$

$\therefore\ a=b$

점 $P(a^2+b^2,\ a^2b^2)$ 에서 $a^2+b^2=x,\ a^2b^2=y$ 로 놓으면

$x^2=(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2=4a^2b^2$

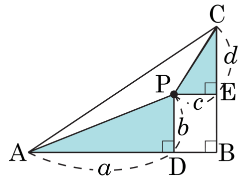
$\therefore\ x^2=4y$

즉 $y=\frac{1}{4}x^2$

그런데 $a\neq 0$ 이므로 $x=a^2+b^2>0$

$\therefore\ y=\frac{1}{4}x^2\ (x>0)$

6. 다음 그림과 같이 $\angle B = 90°$인 직각삼각형 ABC 가 있다. 삼각형의 내부에 한 점 P를 잡고, 점 P 에서 선분 AB, BC 에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 한다. $\overline{AD} = a$, $\overline{DP} = b$, $\overline{PE} = c$, $\overline{EC} = d$ 라 할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?



보기

ㄱ. $\dfrac{b}{a} < \dfrac{d}{c}$ ㄴ. $\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+d}{a+c}$ ㄷ. $\dfrac{b+d}{a+c} < \dfrac{d}{c}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

선분 AP 의 기울기는 $\dfrac{b}{a}$,

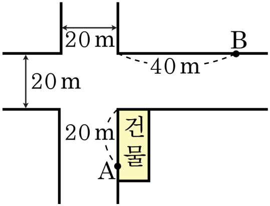
선분 PC 의 기울기는 $\dfrac{d}{c}$,

선분 AC 의 기울기는 $\dfrac{b+d}{a+c}$ 이므로

$\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+d}{a+c} < \dfrac{d}{c}$ 가 성립한다.

따라서 옳은 내용은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

7. 다음 그림과 같이 폭이 20 m 인 인도가 수직으로 만나고 있다. A 지점에 서 있는 사람이 B 지점에 있는 가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최소 거리는?(단위는 m)

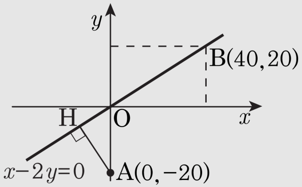


① $2\sqrt{10}$ ② $4\sqrt{10}$ ③ $6\sqrt{5}$

④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

해설

그림과 같이 건물의 모서리를 원점으로 하는
좌표축을 생각하면 A, B 지점의 좌표는
각각$(0, -20)$, $(40,\ 20)$ 이다. 이 때, 원점과
점 B 를 지나는 직선의 방정식이 $x-2y=0$
이므로 가로등을 보기 위하여 움직여야 할
최소거리는 점 A 와 직선 $x-2y=0$
사이의 거리이다. $\therefore\ \overline{AH}=\dfrac{|1\cdot 0-2\cdot(-20)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=8\sqrt{5}$



8. 좌표평면에서 중심이 (a, b) 이고 x 축에 접하는 원이 두 점 $\mathrm{A}(0, 5)$ 와 $\mathrm{B}(8, 1)$ 을 지난다. 이 때, 원의 중심 (a, b) 와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

주어진 원이 x 축에 접하므로 그 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

$\therefore\ x^2+y^2-2ax-2by+a^2=0$

이 원이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$, $\mathrm{B}(8,\ 1)$ 을 지나므로

$a^2-10b+25=0$, $a^2-16a-2b+65=0$

두 식을 연립하면

$4a^2-80a+300=0$, $4(a-5)(a-15)=0$

그런데

$0 \le a \le 8$ 이므로 $a=5,\ b=5$ 이다.

이 때, 직선 AB 의 방정식은

$$y-5=\frac{1-5}{8-0}(x-0)$$

$\therefore\ x+2y-10=0$

따라서 원의 중심 $(5,\ 5)$ 와 직선 AB 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|5+2\cdot5-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

9. 이차곡선 $x^2+y^2+ax+by+7=0$ 이 반지름 1 인 원을 표시한다. 이 원의 중심 $a,\ b$ 가 변할 때, 이 도형의 자취의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}\pi$ ② $2\sqrt{2}\pi$ ③ $3\sqrt{2}\pi$ ④ $4\sqrt{2}\pi$ ⑤ $6\sqrt{2}\pi$

해설

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-28}{4}$$

$\dfrac{a^2+b^2-28}{4}=1$ 에서

$a^2+b^2=32\cdots$㉠

중심 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{b}{2}\right)$ 에서

$x=-\dfrac{a}{2},\ y=-\dfrac{b}{2}$ 이므로

$a=-2x,\ b=-2y$ 를 ㉠에 대입하면

$4x^2+4y^2=32 \quad \therefore\ x^2+y^2=8$

$\therefore\ 2\pi r=4\sqrt{2}\pi$