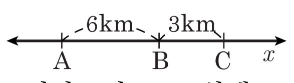
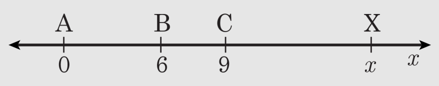
1. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?



① 6 km ② 9 km ③ 12 km
④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
$|x-0| = 2|x-9|$
곧, $|x| = 2|x-9|$
$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$
$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12$(km)

2. 두 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(1, b)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 하면, $\triangle\mathrm{OPQ}$의 무게중심은 $\mathrm{G}(-1, 1)$이다. 이때, $a-b$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(0, y)$라 하면,

$\frac{0+x+0}{3} = -1$, $\frac{0+0+y}{3} = 1$에서

$x = -3,\ y = 3$

$\therefore \mathrm{P}(-3, 0), \mathrm{Q}(0, 3)$

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(a+3)^2 + 4^2 = (1+3)^2 + b^2$

$a^2 + 6a + 9 = b^2$

$\overline{\mathrm{QA}}^2 = \overline{\mathrm{QB}}^2$에서

$a^2 + (4-3)^2 = 1^2 + (b-3)^2$

$a^2 = b^2 - 6b + 9$

두 식을 변변 빼고 정리하면 $a - b = -3$

3. 세 점 $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(2,-3)$, $\mathrm{C}(k,k-1)$ 이 같은 직선위에 있도록 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{7}$　② $\frac{2}{7}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $-\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{5}$

해설

세 점이 같은 직선 위에 있으려면 기울기가 일치해야 한다.

$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기= $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기

$\Rightarrow$ $\dfrac{k-1+3}{k-2} = \dfrac{-3-1}{2-(-1)}$

$\Rightarrow$ $k = \dfrac{2}{7}$

4. 두 직선 $kx+2y+3=0$, $2x+ky+4=0$이 서로 평행하도록 양수 k의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고 y절편은 달라야 한다.

$\frac{k}{2}=\frac{2}{k}\neq\frac{3}{4}$ $\therefore$ $k^2=4$

따라서 양수 k의 값은 2이다.

5. 점 $P(1, 2)$ 에서 직선 $2x + y - 3 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　③ $4\sqrt{2}$　④ 2　⑤ 3

해설

($\overline{PH}$ 의 길이)
= (점 $P(1,\ 2)$ 와 직선 $2x + y - 3 = 0$ 과의 거리)

$\therefore\ \overline{PH} = \dfrac{|2 + 2 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

6. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 <u>않은</u> 것은?

① $x^2+y^2+x+2y+1=0$
② $x^2+y^2+x+2y+2=0$
③ $x^2+y^2+2x+y+1=0$
④ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$
⑤ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

해설

① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$
② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$
③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$
⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

7. x 축에 접하는 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 의 중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3,\ -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y+2)^2=2^2$
$\therefore\ x^2+y^2-6x+4y+9=0$
$\therefore\ a+b+c=-6+4+9=7$

8. 다음은 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다.

> 직선 BC를 x축, 변 BC의 수직이등분선을 y축으로 잡고, A$(a,\ b)$, B$(-c,\ 0)$, C$(c,\ 0)$라고 하자. (단, $b \neq 0$, $c > 0$)
>
> (i) $a \neq c$이고 $a \neq -c$일 때 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{b}{a-c}$이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은
>
> $y = \boxed{\text{(가)}}\left(x - \dfrac{a+c}{2}\right) + \dfrac{b}{2}$
>
> $\quad = \boxed{\text{(가)}}x + \boxed{\text{(나)}}$ $\cdots\cdots$ ㉠
>
> 같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은
>
> $y = -\dfrac{a+c}{b}x + \boxed{\text{(나)}}$ $\cdots\cdots$ ㉡
>
> 두 직선 ㉠, ㉡의 y절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y축 위의 점 $(0, \boxed{\text{(나)}})$에서 만난다. 따라서 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
>
> (ii) $a = c$ 또는 $a = -c$일 때
>
> $\triangle$ABC는 $\boxed{\text{(다)}}$이므로 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
>
> 따라서 $\triangle$ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

② $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 정삼각형

③ $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

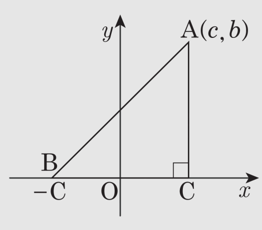
④ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

⑤ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

해설

직선 AC의 기울기가 $\dfrac{b}{a-c}$이므로

변 AC에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $\dfrac{b}{a-c}\cdot m = -1$에서 $m = -\dfrac{a-c}{b}$이다.



이때, 중점 E$\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$이므로 변 AC에 수직인 직선의 방정식은

$$y = \left[-\frac{a-c}{b}\right]\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$$
$$= -\frac{a-c}{b}x + \frac{a^2-c^2}{2b} + \frac{b}{2}$$
$$= \left[-\frac{a-c}{b}\right]x + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right]$$

즉, (가), (나)에 들어갈 것은 차례로 $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$이다.

한편, $a = c$ 또는 $a = -c$일 때는 다음 그림에서 보면 $\triangle$ABC는 직각삼각형이다.

9. 직선 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 $\mathrm{A} * \mathrm{B}$, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1 : 3$으로 내분하는 점을 $\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B}$, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2 : 1$로 내분하는 점을 $\mathrm{A} \star \mathrm{B}$로 나타내기로 한다. 다음 중 $\mathrm{B} \star (\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B})$와 같은 것을 모두 고르면?

① $\mathrm{A} * \mathrm{B}$
② $\mathrm{A} \star \mathrm{B}$
③ $(\mathrm{A} \star \mathrm{B}) * (\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B})$
④ $(\mathrm{A} \star \mathrm{B}) \circledcirc \mathrm{A}$
⑤ $(\mathrm{B} * \mathrm{A}) \circledcirc (\mathrm{B} \star \mathrm{A})$

해설

두 점 A, B의 좌표를 각각 a, b라 하면

$$\mathrm{B} \star (\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B}) = \frac{b + 2 \cdot \dfrac{3a+b}{4}}{3} = \frac{a+b}{2} = \mathrm{A} * \mathrm{B}$$

$$(\mathrm{A} \star \mathrm{B}) * (\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B}) = \frac{\dfrac{a+2b}{3} + \dfrac{3a+b}{4}}{2} = \frac{13a+11b}{24}$$

$$(\mathrm{A} \star \mathrm{B}) \circledcirc \mathrm{A} = \frac{3 \cdot \dfrac{a+2b}{3} + a}{4} = \frac{a+b}{2} = \mathrm{A} * \mathrm{B}$$

$$(\mathrm{B} * \mathrm{A}) \circledcirc (\mathrm{B} \star \mathrm{A}) = \frac{3 \cdot \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{2a+b}{3}}{4} = \frac{13a+11b}{24}$$

10. 좌표평면 위의 네 점 $A(-3,-3)$, $B(3,-3)$, $C(3,5)$, $D(-3,5)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD가 있다. ABCD의 넓이를 이등분하는 직선이 항상 지나는 점 E의 좌표는?

① $(-4,0)$ ② $(0,1)$ ③ $(0,2)$
④ $(1,2)$ ⑤ $(4,3)$

해설

좌표평면 위에 네 점 A, B, C, D를 그리면
대각선의 교점은 $\overline{AC}$의 중점이다.

$$\left(\frac{-3+3}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right)=(0,1)$$

따라서 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은
항상 $(0,1)$을 지난다

11. 좌표평면 위의 세 점 $O(0,0)$, $A(3,1), B(1,3)$ 에 대하여 선분 OA, AB, BO 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 차례로 P, Q, R 라 할 때, $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ② $(1, -1)$ ③ $(1, 1)$
④ $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ⑤ $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

해설

$P(x_1, y_1)$ 이라 하면

$$x_1 = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{2+1},$$

$$y_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{2+1}$$

$\therefore P\left(2, \frac{2}{3}\right)$

점 Q, R 도 마찬가지 방법으로 계산하면

$Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

따라서 $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}}{3}, \frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{3} + 1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

12. 세 점 $A(2,1), B(1,3), C(2,0)$에 대하여 $2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$을 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하면?

① $x - y + 1 = 0$　② $x + 2y + 3 = 0$　③ $x - 3y - 2 = 0$
④ $x - 4y + 5 = 0$　⑤ $x - 5y + 4 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (y-3)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= (x-2)^2 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + y^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 + 4\end{aligned}$$

$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 3\overline{CP}^2$에서

$2\left(x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5\right) + x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 3\left(x^2 - 4x + y^2 + 4\right)$

$3x^2 - 10x + 3y^2 - 10y + 20 = 3x^2 - 12x + 3y^2 + 12$

$2x - 10y + 8 = 0$

$\therefore x - 5y + 4 = 0$

13. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ ④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

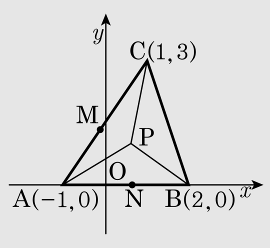
두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
$\mathrm{P}(a,\ b)$ 라고 하면
$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$
$3a+2b-1 = 2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1 = -2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

14. 좌표평면 위에 세 점 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 3)$ 이 있다. $\triangle ABC$ 의 내부의 점 P가 $\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 인 관계를 만족시키면서 움직인다. 점 P가 그리는 도형의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

점 P가 $\triangle ABC$ 의 내부의 점이고
$\triangle BPC = \triangle APC + \triangle APB$ 이므로



$\therefore\ \triangle BPC = \dfrac{1}{2}\triangle ABC$

점 P는 $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 의 중점 M, N 을 잇는 선분 위에 있다.

그런데 $M\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$

점 P의 자취 $\overline{MN} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

15. 중심이 x 축 위에 있고 두 점 $(-1,\ 4)$, $(6,\ 3)$ 을 지나는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2+y^2=5$　　② $(x+2)^2+y^2=5$

③ $(x-2)^2+y^2=25$　　④ $(x+1)^2+y^2=25$

⑤ $(x+2)^2+y^2=25$

해설

원의 중심의 좌표를 $(a,\ 0)$,
반지름의 길이를 r 라 하면,
원의 방정식은 $(x-a)^2+y^2=r^2\ \cdots$ ㉠
이 원이 두 점 $(-1,\ 4)$, $(6,\ 3)$ 을 지나므로,
$x=-1,\ y=4$ 를 ㉠ 에 대입하면,
$(-1-a)^2+4^2=r^2$
$\therefore\ a^2+2a+17=r^2\ \cdots$ ㉡
$x=6,\ y=3$ 을 ㉠ 에 대입하면,
$(6-a)^2+3^2=r^2$
$\therefore\ a^2-12a+45=r^2\ \cdots$ ㉢
㉡ − ㉢ 을 하면, $14a-28=0$, $\therefore\ a=2$
$a=2$ 를 ㉡ 에 대입하면, $r^2=25$
따라서 구하는 원의 방정식은 $(x-2)^2+y^2=25$