1. $f(x)=x^{61}+x^{47}+1$이라고 할 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=f(-i)=(-i)^{61}+(-i)^{47}+1=1$

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=f(i)=i^{61}+i^{47}+1=1$

2. 복소수 z의 켤레복소수가 $\bar{z}$일 때, $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 를 만족시키는 복소수 z 는?

① 존재하지 않는다.
② 단 한 개 있다.
③ 두 개 뿐이다.
④ 세 개 뿐이다.
⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$ 라 하면 $\bar{z}=a-bi$ (단, $a,\ b$ 는 실수)
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$2a+2bi+3ai-3b+2a-2bi-3ai-3b=2$
$4a-6b=2 \qquad \therefore\ 2a-3b=1$
$2a-3b=1$ 을 만족하는 실수 $a,\ b$ 의 순서쌍은 무수히 많으므로
주어진 조건을 만족하는 복소수 z 는 무수히 많다.

3. 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 때, $|\,a\,| + |\,b\,| - |\,a - b\,|$ 를 간단히 하면?

① $2a$　　② $-2b$　　③ 0　　④ $-2a$　　⑤ $2b$

해설

$a \geq 0,\ b < 0$

$|\,a\,| + |\,b\,| - |\,a - b\,| = a - b - (a - b) = 0$

4. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

ⅰ) $x<3$ 일 때,
$-(x-3)-(x-4)=3$, $-2x=-5$
$\therefore\ x=\frac{5}{2}$
ⅱ) $3\le x<4$ 일 때
$(x-3)-(x-4)=2$, $0\cdot x=1$
∴ 해가 없다.
ⅲ) $x\ge 4$ 일 때
$x-3+x-4=2$, $2x=9$
$\therefore\ x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

5. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$ 이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\{x-(1+i)\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

6. 방정식 $x^2 + |x| = |x-1| + 5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$　② $-\sqrt{6}$　③ 0
④ $\sqrt{6}$　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x < 0$일 때
$x^2 - x = -(x-1) + 5,\ x^2 = 6$
$\therefore x = \pm\sqrt{6}$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -\sqrt{6}$
ⅱ) $0 \le x < 1$일 때
$x^2 + x = -(x-1) + 5$
$x^2 + 2x - 6 = 0$
$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$
그런데 $0 \le x < 1$이므로 해가 없다.
ⅲ) $x \ge 1$일 때,
$x^2 + x = x - 1 + 5,\ x^2 = 4$
$\therefore x = \pm 2$
그런데 $x \ge 1$이므로 $x = 2$
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는
$x = 2$또는 $x = -\sqrt{6}$이므로
두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

7. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,
$f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

① 0

② a_0

③ a_1

④ a_5

⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
$\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
$f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

8. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3$, $x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

9. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, z 는 순허수이다.
㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$

$\therefore\ z=bi \Rightarrow$ 순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)

㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우

$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z}=c+di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

10. $x^2 + 3ax + b = 0$과 $x^2 - ax + c = 0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$가 최소가 되는 a의 값은 ?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서
$1 + 3a + b = 0 \cdots$ ㉠
$1 - a + c = 0 \cdots$ ㉡
㉠ − ㉡ : $4a + b - c = 0$
$\therefore\ b - c = -4a$
$\therefore\ 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a-1)^2 - 2$
따라서 $a = 1$일 때, 최소이다.

11. x의 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q - 2 = 0$의 두 실근의 비가 $1 : 2$가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 q의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$　② $q > \frac{1}{2}$　③ $q \geq \frac{1}{2}$
④ $q > -\frac{1}{2}$　⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 α, 2α라 하면
$\alpha + 2\alpha = 3p \;\therefore\; \alpha = p$
$\alpha \cdot 2\alpha = 4q - 2 \;\therefore\; \alpha^2 = 2q - 1$
따라서 $p^2 = 2q - 1$
한편 $\mathrm{D} > 0$에서 $9p^2 - 4(4q - 2) > 0$
$9(2q - 1) - 16q + 8 > 0$
$2q - 1 > 0$
$\therefore\; q > \frac{1}{2}$

12. 이차함수 $y=-x^2-2kx+4k$ 의 최댓값이 M 일 때, M 의 최솟값을 구하면?

① 1 ② -2 ③ 3 ④ -4 ⑤ 5

해설

$y=-x^2-2kx+4k=-(x+k)^2+k^2+4k$
$M=k^2+4k$ 이므로
$M=(k+2)^2-4$ 이다.
따라서 M 의 최솟값은 -4 이다.

13. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$이 $x = -1 + \sqrt{2}$를 한 근으로 가질 때, $2a - b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
$\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
$= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
$\therefore 2 + c = 5, 4 + 2c = a, 10 - c = b$
$\therefore a = 10, b = 7, c = 3$

14. 방정식 $xy + 4x - 2y - 11 = 0$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 xy의 값이 아닌 것은?

① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$xy + 4x - 2y - 11 = 0$에서 $(x-2)(y+4) = 3$

x, y가 정수이므로

$(x-2,\ y+4) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$

$\therefore\ (x,\ y) = (3, -1), (1, -7), (5, -3), (-1, -5)$

$\therefore\ xy = -3, -7, -15, 5$

15. 복소수 α, β 는 $\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$ 을 만족하고 $\alpha + \beta = i$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 4　　② 3　　③ 2　　④ 1　　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\alpha + \beta = i$에서 $\overline{\alpha + \beta} = \overline{i}$ $\quad \therefore\ \overline{\alpha} + \overline{\beta} = -i$

$\alpha\overline{\alpha} = 1$, $\beta\overline{\beta} = 1$에서 $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, $\overline{\beta} = \frac{1}{\beta}$

$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$ $\quad \therefore\ \alpha\beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = i^2 - 2 \cdot (-1) = 1$

16. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+p+5=0$의 두근 $\alpha,\ \beta$가 모두 양의 정수일 때, $\alpha>\beta$를 만족하는 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=p+1,\ \alpha\beta=p+5$

$\therefore \alpha+\beta-1=\alpha\beta-5$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=5$

$\alpha,\ \beta$ 모두 양의 정수이고, $\alpha>\beta$이므로

$\alpha-1=5,\quad \beta-1=1$

$\alpha=6,\ \ \beta=2$

$\therefore (6,\ 2)$ 1 개

17. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2 사분면을 지나지 않는다고 할 때, a의 값의 범위는?

① $a \geq -\frac{3}{4}$ ② $a \leq -\frac{3}{4}$ ③ $a \leq \frac{3}{4}$
④ $a \leq 3$ ⑤ $a \geq -3$

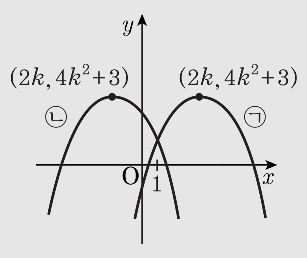
해설

$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$
$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$
$(y$절편$) \leq 0, 4a + 3 \leq 0$
$\therefore \ a \leq -\frac{3}{4}$

18. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{9}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$y = -x^2 + 4kx + 3 = -(x-2k)^2 + (4k^2+3)$

㉠ 경우 : $2k \geq 1 \Rightarrow k \geq \frac{1}{2}$

최대 : $4k^2 + 3 = 11,\ k^2 = 2$

$\therefore\ k = \sqrt{2}\ \left(\because\ k \geq \frac{1}{2}\right)$

㉡ 경우 : $2k \leq 1 \Rightarrow k \leq \frac{1}{2}$

최대 : $y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$

$k = \frac{4}{9}$ 인데 $k \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore$ 해가 존재하지 않음.

$\therefore\ k = \sqrt{2}$

19. x에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + 3a - 2 = 0$이 허근을 갖고 이 근의 세제곱은 실수이다. 이 때, 실수 a값들의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

한 허근을 x라 하면 $x^3 = b^3$ (b는 실수)라 할 수 있다.
$x^3 - b^3 = 0 \Leftrightarrow (x - b)(x^2 + bx + b^2) = 0$
$x^2 + ax + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + bx + b^2 = 0$
$a = b, 3a - 2 = b^2$
두 식을 연립해서 풀면 $a = 1, 2$

해설

$x^2 = -ax - 3a + 2 \ x^3 = -ax^2 - (3a - 2)x$
$x^3 = k$ (실수) 라 하면 $k = -a(-ax - 3a + 2) - (3a - 2)x$
$(a^2 - 3a + 2)x + 3a^2 + 2a - k = 0$
x가 허수이므로 $a^2 - 3a + 2 = 0$
$(a - 1)(a - 2) = 0$
$\therefore \ a = 1, 2$

20. 서로 다른 세 실수 a, b, c가 $a^3 - 6a = b^3 - 6b = c^3 - 6c = -1$을 만족시킬 때, $a^3 + b^3 + c^3$의 값은?

① 1　　② -1　　③ 3　　④ -3　　⑤ 6

해설

$a^3 - 6a = -1,\ b^3 - 6b = -1,\ c^3 - 6c = -1$이므로
$a,\ b,\ c$는 삼차방정식 $x^3 - 6x = -1$
즉, $x^3 - 6x + 1 = 0$의 세 근이다.
따라서, 근과 계수와의 관계에서 $a + b + c = 0,\ ab + bc + ca = 6,\ abc = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
에서 $a + b + c = 0$이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3 \cdot (-1) = -3$