

1. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(3, a), C(4, 2)에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{BC} &\text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 이므로} \\ (3-2)^2 + (a-0)^2 &= (4-3)^2 + (2-a)^2 \\ 1 + a^2 &= 1 + 4 - 4a + a^2 \\ 4a &= 4 \quad \therefore a = 1\end{aligned}$$

2. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 A($a, 3$), B($-1, -5$), C($3, 7$) 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
 $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{1}$
이때, 세 점 A($a, 3$), B($-1, -5$), C($3, 7$)에 대하여
 $\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$
 $\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$
 $\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160$ 이므로
 $\textcircled{1}$ 에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
 $\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2 이다.

3. 수직선 위의 두 점 A(-1), B(5)에 대하여 $\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 3 : 2로 외분하는 점을 Q라 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

① 14 ② 10 ③ 16 ④ 7 ⑤ 18

해설

P(x)로 놓으면

$$x = \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1)}{2 + 1} = 3,$$

$$y = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)}{3 - 2} = 17$$

$$\therefore \overline{PQ} = 17 - 3 = 14$$

4. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$ 에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

㉠ $(4, 2)$

㉡ $(2, 4)$

㉢ $(3, 5)$

㉣ $(5, 3)$

㉤ $(1, -5)$

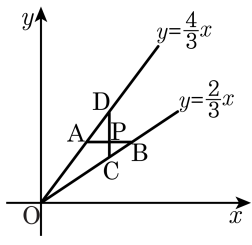
해설

D (a, b) 라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$ 의 중점과 $\overline{BC}$ 의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore a = 4, b = 2$$

5. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 $y = \frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{AP} \cdot \overline{BP}}{\overline{CP} \cdot \overline{DP}}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$
 ② $\frac{8}{9}$
 ③ $\frac{9}{8}$
 ④ $\frac{9}{2}$
 ⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

$$\text{직선 } y = \frac{4}{3}x \text{ 의 기울기에서 } \frac{\overline{DP}}{\overline{AP}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{직선 } y = \frac{2}{3}x \text{ 의 기울기에서 } \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BP}}{\overline{CP} \cdot \overline{DP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

6. 세 점 A(-2, 9), B(3, -1), C(5, a)가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -6

② -5

③ 2

④ 9

⑤ 13

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 기울기가 같다.

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{9 - (-1)}{-2 - 3} = -2$ 이고

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{a - (-1)}{5 - 3}$ 이다.

$\therefore a = -5$

7. 좌표평면 위에 세 점 $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$, $C(6, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. 직선 $y = mx + 2m + 1$ 에 의하여 $\triangle ABC$ 의 넓이가 이등분될 때, m 의 값은?

- ① $\frac{2}{7}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y = m(x + 2) + 1$ 은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로 점 A 를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{BC}$ 의 중점 $M(5, 5)$ 를 지나야 한다.
 $\therefore 5 = m(5 + 2) + 1$
 $\therefore m = \frac{4}{7}$

8. 두 점 A(0,3), B(5,-2)로부터 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① (1,0) ② (2,0) ③ (3,0) ④ (4,0) ⑤ (5,0)

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{ 이므로, } \alpha^2 + 9 = (\alpha - 5)^2 + 2^2$$

$$\therefore \alpha = 2$$

$$\therefore P = (2, 0)$$

9. 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 A(1, 6), B(2, -1)에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

- ① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{12}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

$$\begin{aligned} (a, b) \text{가 } y = x \text{ 위에 있으므로 } b &= a \\ \sqrt{(a-1)^2 + (a-6)^2} &= \sqrt{(a-2)^2 + (a+1)^2} \\ (a-1)^2 + (a-6)^2 &= (a-2)^2 + (a+1)^2 \\ -2a + 1 - 12a + 36 &= -4a + 4 + 2a + 1 \\ -12a &= -32 \\ \therefore a &= \frac{8}{3} \\ \therefore a + b = a + a &= \frac{8}{3} \times 2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

10. 다음은 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다.

직선 BC를 x 축, 변 BC의 수직이등분선을 y 축으로 잡고, $A(a, b), B(-c, 0), C(c, 0)$ 라고 하자. (단, $b \neq 0, c > 0$)
 (i) $a \neq c$ 이고 $a \neq -c$ 일 때 직선 AC의 기울기는 $\frac{b}{a-c}$ 이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은 $y = \frac{\text{(가)}}{\text{(가)}}\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$
 $= \frac{\text{(가)}}{\text{(가)}}x + \frac{\text{(나)}}{\text{(나)}} \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$
 같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은 $y = -\frac{a+c}{b}x + \frac{\text{(나)}}{\text{(나)}} \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$
 두 직선 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 의 y 절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y 축 위의 점 $(0, \frac{\text{(나)}}{\text{(나)}})$ 에서 만난다. 따라서 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
 (ii) $a = c$ 또는 $a = -c$ 일 때 $\triangle ABC$ 는 $\frac{\text{(다)}}{\text{(다)}}$ 이므로 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
 따라서 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

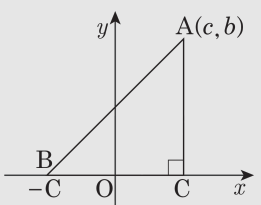
위

의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $-\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형
- ② $-\frac{a-c}{b}, \frac{2b}{a^2+b^2-c^2}$, 정삼각형
- ③ $-\frac{a-c}{b}, \frac{2b}{-a^2+b^2-c^2}$, 이등변삼각형
- ④ $\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형
- ⑤ $\frac{a-c}{b}, \frac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

해설

직선 AC의 기울기가 $\frac{b}{a-c}$ 이므로
 변 AC에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면 $\frac{b}{a-c} \cdot m = -1$ 에서 $m = -\frac{a-c}{b}$ 이다.



이때, 중점 $E\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이므로 변

$$\begin{aligned} \text{AC에 수직인 직선의 방정식은} \\ y &= \left[-\frac{a-c}{b}\right]\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2} \\ &= -\frac{a-c}{b}x + \frac{2b}{a^2-c^2} + \frac{b}{2} \\ &= \left[-\frac{a-c}{b}\right]x + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right] \end{aligned}$$

즉, (가), (나)에 들어갈 것은 차례로 $-\frac{a-c}{b}, \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$ 이다.

한편, $a = c$ 또는 $a = -c$ 일 때는 다음 그림에서 보면 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이다.

11. 두 점 A(1, 2), B(-3, 0) 으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y = 2x + 1$

② $y = 2x - 1$

③ $y = -2x + 1$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 P(x,y) 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

양변을 제곱해서 정리하면

$$-8x - 4y - 4 = 0, -4y = 8x + 4$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

해설

두 점 으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.

$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고

$\overline{AB}$ 의 중점(-1, 1) 을 지난다.

$$\therefore y - 1 = -2(x + 1)$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

12. 두 점 A(-2, 0), B(1, -1)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

- ㉠ P $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ㉡ P (-1, -1) ㉢ P (0, 0)
㉣ P $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ㉤ P (1, 1)

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x+2)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 \\ &= 2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 + x) + 2(y^2 + y) + 6 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 5\end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 된다.

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

13. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때,
 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$
의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
직선상에 있을 때
최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$

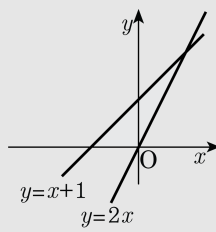
14. 기울기가 각각 1, 2 인 두 직선이 한 점 (1, 2) 에서 만날 때, 두 직선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

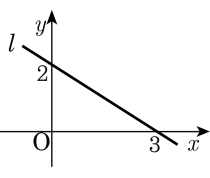
해설

기울기가 1, 2 인 두 직선은 $y = x + a$, $y = 2x + b$ 로 놓을 수 있고,
이 두 직선이 (1, 2) 를 지나므로 $a = 1$, $b = 0$
따라서 두 직선은 다음 그림과 같고 넓이 S 는

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$



15. 직선 l 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음
중이 직선 위의 점은?



- ① (0, 3)
- ② (2, 0)
- ③ (2, 1)
- ④ (6, -2)
- ⑤ (6, -1)

해설

주어진 직선 l 의 기울기는 $-\frac{2}{3}$, y 절편이 2이므로
직선 l 의 방정식은 $y = -\frac{2}{3}x + 2 \cdots \textcircled{1}$
따라서, $\textcircled{1}$ 을 만족하는 점은 (6, -2)이다.