1. 삼차방정식 $x^3-7x^2+9x+9=0$의 근 중에서 무리수인 두 근을 $a,\ b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3-7x^2+9x+9=0$

$(x-3)(x^2-4x-3)=0$

$x^2-4x-3=0$의 두 근이 $a,\ b(\because$무리수$)$

$a+b=4$

2. 사차식 x^4-4x^2-12 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$

③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

x^4-4x^2-12, $x^2=Y$ 라 하자

$\Rightarrow\ Y^2-4Y-12=(Y+2)(Y-6)=0$

$Y=-2$ 또는 $Y=6$

$\Rightarrow\ x^2=-2,\ x^2=6$

$\Rightarrow\ x=\pm\sqrt{2}i,\ x=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ x^4-4x^2-12$

$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

3. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서

$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$

$x^4-2x^2-3=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0,\ (t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$

(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$

(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

4. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 $a + b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이므로 복소수의 켤레근인 $1 - 2i$ 도 근이다. 또 다른 근은 α 라 하자.

$(1+2i)(1-2i)\alpha = 5$, $5\alpha = 5$

$\alpha = 1$

$-a = (1+2i) + (1-2i) + 1 = 3$

$a = -3$

$b = (1+2i)(1-2i) + (1-2i) + (1+2i) = 7$

$\therefore\ a + b = 4$

5. x, y가 연립방정식 $\begin{cases} x^2+4xy+y^2=10 \\ x-y=2 \end{cases}$ 를

만족시킬 때, $(x+y)^2$의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(x-y)^2=4$에서

$$\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4 & \cdots ㉠ \\ x^2+4xy+y^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡ − ㉠ : $6xy=6$,

$\therefore\ xy=1$

$$\therefore\ (x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$
$$=4+4\cdot 1=8$$

해설

실제로 연립방정식을 풀면,

$x=y+2$를 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+4y(y+2)+y^2=10$

$6y^2+12y-6=0,\ y^2+2y-1=0$

근의 공식을 이용하면,

$\therefore\ y=-1\pm\sqrt{2},\ x=1\pm\sqrt{2}$(복호동순)

$$\therefore\ (x+y)^2=((1\pm\sqrt{2})+(-1\pm\sqrt{2}))^2$$
$$=(\pm 2\sqrt{2})^2=8$$

6. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha$, $y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 최댓값은?

① 4　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 10

해설

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 & \cdots ① \\ 5x^2 - y^2 = 4 & \cdots ② \end{cases}$$

①식을 인수분해하면

$(2x - y)(x - y) = 0 \quad \therefore \ y = 2x, \ y = x$

②식에 대입하면

$y = 2x$일 때 $5x^2 - (2x)^2 = 4, \ x^2 = 4, \ x = \pm 2, \ y = \pm 4$

$y = x$일 때 $5x^2 - x^2 = 4, \ \ 4x^2 = 4 \ x^2 = 1, \ \ x = \pm 1, \ y = \pm 1$

$\therefore \alpha + \beta = 6, \ -6, \ 2, \ -2$

$\therefore \alpha + \beta$ 의 최댓값은 6

7. 방정식 $x^3-x^2+ax-1=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a=3,\ 1\pm\sqrt{2}$

② $a=-3,\ 1\pm\sqrt{2}$

③ $a=3,\ 1\pm\sqrt{3}$

④ $a=-3,\ 1\pm\sqrt{3}$

⑤ $a=-1,\ 1\pm\sqrt{2}$

해설

$x=-1$이 근이므로 $-1-1-a-1=0$에서 $a=-3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $=(x+1)(x^2-2x-1)=0$
$x^2-2x-1=0$의 근은 $1\pm\sqrt{2}$
$\therefore a=-3$, 나머지 근은 $1\pm\sqrt{2}$

8. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α,β,γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$

$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로

$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

9. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2
② $-1+\sqrt{2}$, -3
③ $1-\sqrt{2}$, 3
④ $1-\sqrt{2}$, -3
⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

10. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t+4)=0$ 에서

$t=1$ 또는 $t=-4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

11. x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+5=0$, $x^2+5x+a=0$이 공통근을 갖는 실수 a의 값들의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통근을 p라 하면

$p^2+ap+5=0$, $p^2+5p+a=0$

두 식을 빼면, $(a-5)p=a-5$

$(a-5)(p-1)=0$

$\therefore a=5$ 또는 $p=1$

$p=1$이면, $1+a+5=0$, $a=-6$

$\therefore a$의 합 : $-6+5=-1$

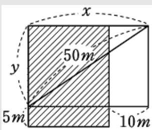
12. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ **답 :** ______ m

▷ **정답 :** 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

$(y-14)(y+30) = 0$

$\therefore\ y = 14,\ -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

13. 삼차방정식 $x^3+3x^2-2x-1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 x의 삼차방정식은 $x^3+ax^2+bx+c=0$이다. 이때, $a+b+c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+3x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta+\gamma=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$

$\alpha\beta\gamma=1$

$x^3+ax^2+bc+c=0$에서

$$\begin{aligned}-a &= \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\\ &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\\ &= \frac{-2}{1}=-2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=2$

$$\begin{aligned}b &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}\\ &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{1}=-3\end{aligned}$$

$\therefore\ b=-3$

$$-c=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=1$$

$\therefore\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-2$

14. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-3,\ 1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$$

$$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$$

$\therefore\ a+b=-10$

15. 삼차방정식 $x^3-4x^2+x+k=0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x=-1$을 대입하면

$(-1)^3-4-1+k=0 \quad \therefore k=6$

$x^3-4x^2+x+6=0$의 나머지 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

세 근의 합 $4=-1+\alpha+\beta$에서 $\alpha+\beta=5$

$\therefore k+\alpha+\beta=11$

16. 연립방정식 $\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 의 해를

$x=\alpha$,$y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x+1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2+(x+1)^2=5,\ 2x^2+2x-4=0,$

$2(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1,\ -2$

$x=1$일 때, $y=2,$

$x=-2$일 때, $y=-1$

$\therefore\ \alpha=1, \beta=2$ 또는 $\alpha=-2,\ \beta=-1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$

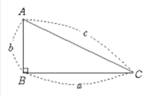
$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

18. 넓이가 30 이고, 둘레의 길이가 30 인 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설



$\frac{1}{2}ab = 30, \ ab = 60$

$a + b + c = 30, \ a + b = 30 - c$

$a^2 + b^2 = c^2 \ (a + b)^2 - 2ab = c^2$

$(30 - c)^2 - 2 \cdot 60 = c^2$

$c^2 - 60c + 900 - 120 = c^2$

$60c = 780, \ \therefore \ c = 13$

19. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2-2v=25 \\ v=12 \end{cases}$$

$\therefore\ u=\pm 7,\ v=12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x+y=7 & \cdots ㄷ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x+y=-7 & \cdots ㄹ \\ xy=12 & \cdots ㄴ \end{cases}$

(i) ㄷ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=3,\ y=4$ 또는 $x=4,\ y=3$

(ii) ㄹ, ㄴ에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2+7t+12=0$ 의 두 근이므로 $x=-3,\ y=-4$ 또는 $x=-4,\ y=-3$

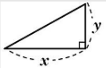
(i), (ii) 로부터 구하는 모든 해의 합은 0

20. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 $21\,\mathrm{cm}$ 이고, 빗변의 길이가 $15\,\mathrm{cm}$ 일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$$\begin{cases} x+y=21 \cdots ① \\ x^2+y^2=15^2 \cdots ② \end{cases}$$ 이다.

①에서 $y=21-x$ 를 ②에 대입하면

$x^2+(21-x)^2=15^2$

$x^2+21^2-42x+x^2=15^2$

$2x^2-42x+21^2-15^2=0$

$2x^2-42x+(21+15)(21-15)=0$

$x^2-21x+3\times36=0$

$(x-12)(x-9)=0$,

$x=12$ 또는 $x=9$

$x=12$ 일 때 $y=9$

$x=9$ 일 때 $y=12$

따라서 긴 변의 길이는 $12\,\mathrm{cm}$ 이다.