1. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-8x+6y+k=0$ 의 교점이 1 개 이상 존재하기 위한 정수 k 의 개수는?

① 18 개　② 19 개　③ 20 개　④ 21 개　⑤ 22 개

해설

$\Rightarrow \quad x^2+y^2=1, (x-4)^2+(y+3)^2=25-k$
교점이 1 개 이상이 되려면 중심사이 거리가
반지름의 합 이하가 되어야 하고 반지름의 차
이상이 되어야 한다.
$\Rightarrow \quad \sqrt{25-k}-1 \le \sqrt{3^2+4^2} \le \sqrt{25-k}+1$
$\Rightarrow \quad 25-k \le 36,\ 25-k \ge 16$
$\Rightarrow \quad -11 \le k \le 9$
$\therefore$ 정수 k 의 개수는 21 개

2. 반지름의 길이가 각각 $4\,\text{cm}$, $9\,\text{cm}$ 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① $8\,\text{cm}$ ② $10\,\text{cm}$ ③ $11\,\text{cm}$ ④ $12\,\text{cm}$ ⑤ $14\,\text{cm}$

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는
$13\,\text{cm}$ 이다.
공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2 - (9-4)^2} = 12$

3. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$의 교점과 점 $(1,\ 0)$을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2-2x-3y+1=0$ ② $x^2+y^2-5x-y+4=0$
③ $x^2+y^2-6x-4y+5=0$ ④ $x^2+y^2+4x+2y+2=0$
⑤ $x^2+y^2-5x+4y+3=0$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+k\left(x^2+y^2-6x-2y+8\right)=0$
($k\neq-1$인 실수)
이 원이 점 $(1,0)$을 지나므로
$1-4+k(1-6+8)=0$
$-3+3k=0 \quad \therefore k=1$
따라서, 주어진 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+x^2+y^2-6x-2y+8=0$
$\therefore x^2+y^2-5x-y+4=0$

4. 좌표평면 위의 두 점 $A(8, 0)$, $B(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

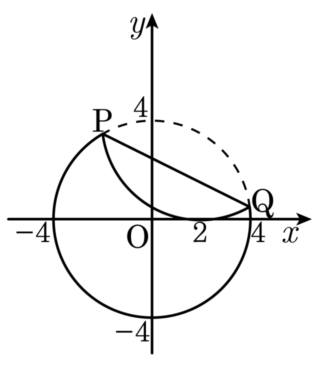
▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$
$\therefore abc = 0$

5. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$을 점 $(2, 0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

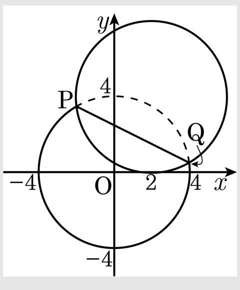


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16//$



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2 + y^2 - 16 - \{(x-2)^2 + (y-4)^2 - 16\} = 0$

$\therefore x + 2y - 5 = 0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.