1. 두 원 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-8x+6y+k=0$ 의 교점이 1 개 이상 존재하기 위한 정수 k 의 개수는?

① 18 개 ② 19 개 ③ 20 개 ④ 21 개 ⑤ 22 개

해설

$\Rightarrow \quad x^2+y^2=1, (x-4)^2+(y+3)^2=25-k$

교점이 1 개 이상이 되려면 중심사이 거리가 반지름의 합 이하가 되어야 하고 반지름의 차 이상이 되어야 한다.

$\Rightarrow \quad \sqrt{25-k}-1 \le \sqrt{3^2+4^2} \le \sqrt{25-k}+1$

$\Rightarrow \quad 25-k \le 36,\ 25-k \ge 16$

$\Rightarrow \quad -11 \le k \le 9$

$\therefore$ 정수 k 의 개수는 21 개

2. 반지름의 길이가 각각 4 cm, 9 cm 인 두 원이 외접할 때, 공통외접선의 길이는?

① 8 cm　② 10 cm　③ 11 cm　④ 12 cm　⑤ 14 cm

해설

두 원이 외접하므로 중심 간의 거리는
13 cm 이다.
공통외접선의 길이는 $\sqrt{13^2-(9-4)^2}=12$

3. 두 원 $x^2+y^2-4x=0,\ x^2+y^2-6x-2y+8=0$의 교점과 점 $(1,\ 0)$을 지나는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2-2x-3y+1=0$
② $x^2+y^2-5x-y+4=0$
③ $x^2+y^2-6x-4y+5=0$
④ $x^2+y^2+4x+2y+2=0$
⑤ $x^2+y^2-5x+4y+3=0$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+k\left(x^2+y^2-6x-2y+8\right)=0$
$(k\neq-1$ 인 실수$)$
이 원이 점 $(1,0)$을 지나므로
$1-4+k(1-6+8)=0$
$-3+3k=0 \qquad \therefore k=1$
따라서, 주어진 두 원의 교점을 지나는
원의 방정식은
$x^2+y^2-4x+x^2+y^2-6x-2y+8=0$
$\therefore x^2+y^2-5x-y+4=0$

4. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle \mathrm{AOB} = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.

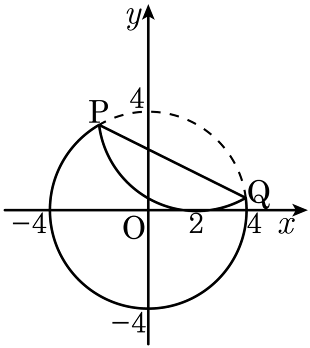
$\overline{\mathrm{AB}} = 10$ 이고 원의 중심은 $\mathrm{C}(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$

$\therefore abc = 0$

5. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$을 점 $(2,0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

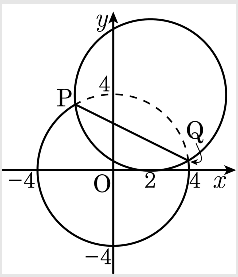


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2,0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$//



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.