

1. 다음 중 $x^2 - 6x + 2a + 4 = 0$ 이 해를 갖기 위한 a 의 값으로 적당하지 않은 것은?

- ① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$$D = (-6)^2 - 4(2a + 4) \geq 0$$

$$9 - 2a - 4 \geq 0, 2a \leq 5$$

$$\therefore a \leq \frac{5}{2}$$

2. 이차방정식 $3x^2 - x + 2 = 0$ 의 한 근을 A , 이차방정식 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 의 한 근을 B 라 할 때, $3A^2 + B^2 - A - 3B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$3A^2 - A + 2 = 0, B^2 - 3B - 6 = 0 \text{ 이므로}$$

$$3A^2 - A = -2, B^2 - 3B = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore 3A^2 + B^2 - A - 3B \\ &= 3A^2 - A + B^2 - 3B \\ &= -2 + 6 = 4 \end{aligned}$$

3. 다음 중 $\left(\frac{7}{3}x - 14\right)(2y + 8) = 0$ 을 만족하는 것의 개수는?

㉠ $x = 6, y = -4$

㉡ $x = 6, y = 4$

㉢ $x = -6, y = -4$

㉣ $x = -6, y = 4$

㉤ $x = 4, y = 6$

㉥ $x = -4, y = 6$

① 한 개도 없다.

② 2 개

③ 3 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

$\frac{7}{3}x - 14 = 0$ 또는 $2y + 8 = 0$ 이므로

$x = 6$ 또는 $y = -4$ 인 것을 찾으면

$x = 6$ 인 것은 ㉠, ㉡

$y = -4$ 인 것은 ㉠, ㉢

따라서 만족하는 것의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢이므로
3 개이다.

4. 이차방정식 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 의 두 근을 a, b 라고 할 때, 다음 중 $a+2, b+2$ 를 두 근으로 갖는 이차항의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 2x - 35 = 0$

② $x^2 + 2x - 35 = 0$

③ $x^2 - 12x + 35 = 0$

④ $x^2 + 12x + 35 = 0$

⑤ $x^2 - 4x - 30 = 0$

해설

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-5)(x-3) = 0$$

$$a = 5, b = 3$$

$$\therefore a+2 = 7, b+2 = 5$$

따라서 5, 7을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$(x-7)(x-5) = 0$$

$$\therefore x^2 - 12x + 35 = 0$$

5. $[x]$ 를 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수라고 하면 $-2 \leq x < -1$ 일 때,
방정식 $-[x]x^2 - x + 3[x] = 0$ 의 근이 $-\frac{a}{b}$ 라고 하면 $a + b$ 의 값을
구하여라. (단, a, b 는 서로소)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$-2 \leq x < -1$ 이므로 $[x] = -2$ 이다.

따라서 $[x] = -2$ 를 대입하면 주어진 방정식은
 $2x^2 - x - 6 = 0$ 이고, 인수분해하여 정리하면
 $(2x + 3)(x - 2) = 0$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \quad (\because -2 \leq x \leq 1)$$

따라서 $a = 3, b = 2$ 이므로 $a + b = 5$ 이다.

6. 두 이차방정식 $2x^2 - ax + 2 = 0$, $x^2 - 3x + b = 0$ 의 공통인 해가 2일 때, ab 의 값을 구하면?

① -25

② -10

③ 1

④ 10

⑤ 25

해설

주어진 식에 x 대신 2를 대입하면

$$8 - 2a + 2 = 0, \quad a = 5$$

$$4 - 6 + b = 0, \quad b = 2$$

$$\therefore ab = 10$$

7. 이차방정식 $(x-1)(x-b) = -1$ 이 0이 아닌 중근 a 를 가진다. 이때, b 의 값은? (단, a, b 는 정수)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$(x-1)(x-b) = -1$ 이 중근 a 를 가지므로
 x 에 a 를 대입하면

$$(a-1)(a-b) = -1$$

i) $a-1 = -1, a-b = 1$ 인 경우

$a = 0, b = -1, a \neq 0$ 이므로 부적합

ii) $a-1 = 1, a-b = -1$ 인 경우

$$a = 2, b = 3$$

$$\therefore b = 3$$

8. $x(x-3) = 0$ 을 $(ax+b)^2 = q$ 의 꼴로 바꾸었을 때, abq 의 값을 구하면?

① $\frac{27}{8}$

② $-\frac{27}{8}$

③ $\frac{-25}{8}$

④ $\frac{25}{8}$

⑤ $\frac{23}{8}$

해설

$$x(x-3) = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$a = 1, b = -\frac{3}{2}, q = \frac{9}{4}$$

$$\therefore abq = -\frac{27}{8}$$

9. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $k = -6$ 이면 근이 2개이다.
- ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
- ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
- ④ $k = 1$ 이면 근이 1개이다.
- ⑤ $k = 3$ 이면 중근을 갖는다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개

$k = 3$: 근이 1개

$3 < k$: 근이 2개

10. 이차방정식 $5x^2 + 12x - 6 = 0$ 의 모든 근 p 에 대해서도 $|p| < n$ 을 만족하는 최소의 양의 정수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$p = \frac{-6 \pm \sqrt{66}}{5}$$

$$\left| \frac{-6 - \sqrt{66}}{5} \right| = \left| \frac{6 + \sqrt{66}}{5} \right| < n$$

따라서 최소의 양의 정수 n 은 3이다.

11. 이차방정식 $x^2 + 2x - k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, $kx^2 + 4x - 1 = 0$ 의 근에 대한 설명 중 옳은 것은? (단, $k \neq 0$)

- ① 서로 다른 두 실근을 갖는다.
② 중근을 갖는다.
③ 근이 없다.
④ k 의 값에 따라 달라진다.
⑤ 주어진 조건만으로는 구할 수 없다.

해설

$x^2 + 2x - k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 (판별식) > 0 이다.

$$D = 2^2 - 4 \times 1 \times (-k) > 0 \rightarrow 4(k + 1) > 0$$

$$\therefore k > -1$$

방정식 $kx^2 + 4x - 1 = 0$ 에서

$$D = 4^2 - 4 \times k \times (-1) = 4(4 + k) > 0 \quad (\because k > -1)$$

따라서 방정식 $kx^2 + 4x - 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

12. 한 개의 주사위를 두 번 던져 처음 나온 눈의 수를 m , 두 번째 나온 눈의 수를 k 라고 할 때,

이차방정식 $mx^2 + (k-2)x + 2 = 0$ 의 근이 중근이 되는 확률을 $\frac{b}{a}$ 라고 한다. $a+b$ 의 값을 구하여라.(단, a, b 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 37

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지려면

$$D = (k-2)^2 - 8m = 0$$

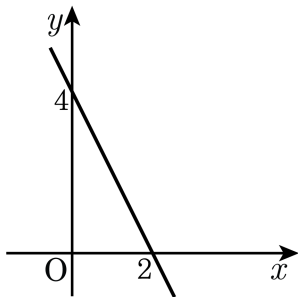
$$(k-2)^2 = 8m \text{ 이므로}$$

$$(m, k) = (2, 6) \text{ 이다.}$$

$$\text{확률은 } \frac{1}{36} \text{ 이다.}$$

$$\therefore a+b = 37$$

13. $y + ax + b = 0$ 의 그래프가 다음 그래프와 같을 때, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 차를 구하면?



- ① 2 ② -2 ③ $\sqrt{5}$
 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $-2\sqrt{5}$

해설

두 점 $(0, 4)$, $(2, 0)$ 을 $y + ax + b = 0$ 에 각각 대입하면 $a = 2$, $b = -4$

$$\therefore x^2 + 2x - 4 = 0$$

두 근의 합은 -2 이고 곱은 -4 이다.

이차방정식의 두 근을 α , β 라고 하면,

두 근의 차 $|\alpha - \beta|$ 는

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{ 에서}$$

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \text{ 이므로}$$

두 근의 차는

$$\pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-4)} = \pm \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

14. 이차방정식 $x^2 - ax - a + 2 = 0$ 의 두 개의 서로 다른 실수의 근을 p, q 라고 할 때 $p^2 + q^2 = 11$ 을 만족하는 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$p + q = a, \quad pq = -a + 2$$

$$p^2 + q^2 = 11$$

$$(p + q)^2 - 2pq = 11$$

$$a^2 - 2(-a + 2) = 11$$

$$a^2 + 2a - 15 = 0$$

$$(a + 5)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -5, 3$$

한편, $x^2 - ax - a + 2 = 0$ 이 서로 다른 두 실수의 근을 가지므로 $D = (-a)^2 - 4(-a + 2) > 0$ 이다.

$a^2 + 4a - 8 > 0$ 이어야 하는데 -5 는 위 부등식을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a = 3$$

15. 이차방정식 $2x^2 + px + q = 0$ 의 해가 $\frac{5 + \sqrt{3}}{2}$, $\frac{5 - \sqrt{3}}{2}$ 일 때, $p + q$, $2p + q$ 를 해로 갖고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2 - 8x - 9 = 0$

② $x^2 + 8x - 9 = 0$

③ $x^2 + 8x + 9 = 0$

④ $x^2 + x - 9 = 0$

⑤ $x^2 + x + 9 = 0$

해설

$$\frac{5 + \sqrt{3}}{2} + \frac{5 - \sqrt{3}}{2} = 5 = -\frac{p}{2}$$

$$\left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{11}{2} = \frac{q}{2}$$

$$\therefore p = -10, q = 11$$

따라서 $p + q = 1$, $2p + q = -9$ 이므로 1 과 -9 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $(x - 1)(x + 9) = 0$

$$\therefore x^2 + 8x - 9 = 0$$

16. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근을 구하는데 소연은 일차항의 계수를 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x = 1 \pm \sqrt{2}$ 가 나왔고, 소희는 상수항을 잘못 보고 풀어서 두 근이 $x = 2 \pm \sqrt{6}$ 이 나왔다. 이 때, ab 의 값은?

① -4

② -2

③ 1

④ 2

⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두근의 합은 $-a$, 두 근의 곱은 b 이다.

소연이는 상수항을 제대로 본 것이므로 소연이가 구한 두 근의 곱은

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1 = b$$

한편, 소희는 일차항을 제대로 본 것이므로 소희가 구한 두 근의 합은

$$(2 + \sqrt{6}) + (2 - \sqrt{6}) = -a$$

$$\therefore a = -4, b = -1$$

$$\therefore ab = 4$$

해설

소연이 푼 식은

$$\{x - (1 + \sqrt{2})\} \{x - (1 - \sqrt{2})\} = 0$$

소연이는 상수항을 제대로 본 것이므로 구하는 상수항 $b = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$

소희가 푼 식은

$$\{x - (2 + \sqrt{6})\} \{x - (2 - \sqrt{6})\} = 0$$

소희는 일차항의 계수를 제대로 본 것이므로 일차항의 계수는 $a = -2 + \sqrt{6} - 2 - \sqrt{6} = -4$

따라서, 처음 이차방정식은 $x^2 - 4x - 1 = 0$

$$\therefore ab = 4$$

17. 1에서 n 까지의 자연수의 합은 $\frac{n(n+1)}{2}$ 이다. 합이 78이 되려면 1에서 얼마까지 더하면 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\frac{n(n+1)}{2} = 78, n(n+1) = 156,$$

$$n^2 + n - 156 = 0,$$

$$(n+13)(n-12) = 0,$$

$$n = -13 \text{ 또는 } n = 12,$$

따라서 n 은 자연수이므로 $n = 12$ 이다.

18. 12월 중 3일 동안 눈이 왔는데 눈이 오기 시작하는 날의 날짜의 제공은 나머지 2일의 날짜의 합과 같다. 눈이 오기 시작하는 날의 날짜는?

- ① 12월 3일 ② 12월 4일 ③ 12월 5일
④ 12월 6일 ⑤ 12월 7일

해설

눈이 내린 날의 날짜를 $x-1$, x , $x+1$ 이라고 하면

$$(x-1)^2 = x + (x+1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2x + 1$$

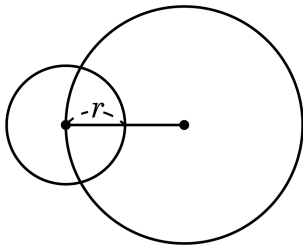
$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 4 \text{ (일)}$$

따라서 눈이 오기 시작한 날짜는 12월 3일이다.

19. 다음 그림과 같이 반지름이 r 인 원과 반지름이 이 원의 두 배인 원이 겹치고 있다. 겹치지 않는 부분의 넓이의 차가 12π 라고 할 때, 반지름 r 의 값은?



① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

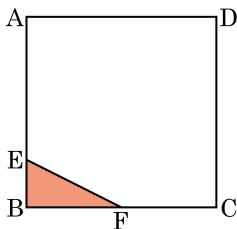
겹치는 부분은 두 원 모두에 있는 부분이므로, 겹치지 않는 부분의 넓이의 차는 두 원의 넓이의 차와 같다.

따라서 식으로 나타내면 $(2r)^2\pi - r^2\pi = 12\pi$ 이다.

$$r^2 - 4 = 0$$

$$\therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

20. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 20 cm 인 정사각형 ABCD 가 있다. 점 F 는 변 BC 위를 점 C 로부터 B 까지 매초 2cm 의 속력으로 움직이고, 점 E 는 변 AB 위를 점 B 로부터 A 까지 매초 1cm 의 속력으로 움직이고 있다. 두 점 E, F 가 동시에 출발하였다면 몇 초 후에 $\triangle BEF$ 의 넓이가 정사각형 넓이의 $\frac{1}{16}$ 배가 되는지 구하여라.



▶ 답 :

초

▷ 정답 : 5 초

해설

x 초 후에 $\overline{BF} = (20 - 2x)$ cm , $\overline{BE} = x$ cm

$\triangle BEF$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\overline{BF} \times \overline{BE}$ 이고,

정사각형 넓이인 $20 \times 20 = 400$ cm² 의 $\frac{1}{16}$ 배 인 25 cm² 이므로

$$\frac{1}{2}(20 - 2x)x = 25$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x - 5)^2 = 0$$

$$\therefore x = 5 \text{ (초)} (\text{단, } 0 < x < 10)$$