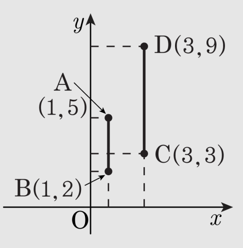
1. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \le f(1) \le 5$, $3 \le f(3) \le 9$ 라고 할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 2　　② $\frac{5}{2}$　　③ 3　　④ $\frac{7}{2}$　　⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$ 를 동시에 지나야 하고
a는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a의 최댓값은 $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 기울기이고
a의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 기울기이다.

$\overline{\mathrm{BD}}$의 기울기$= \frac{9-2}{3-1} = \frac{7}{2}$

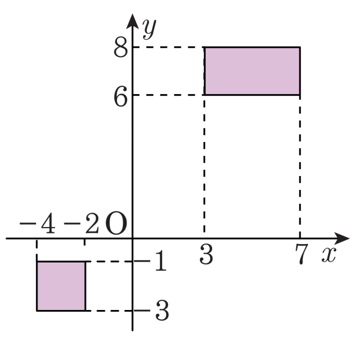
$\overline{\mathrm{AC}}$의 기울기$= \frac{3-5}{3-1} = -1$

$\therefore$ 최댓값+최솟값$= \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$\therefore\ -1 \le a \le \frac{7}{2}$

2. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



① $\frac{9}{10}$　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{8}{7}$　④ $\frac{4}{3}$　⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
l의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7-(-2)}{5-(-3)} = \frac{9}{8}$$

3. 두 점 $\mathrm{A}(3,2)$, $\mathrm{B}(a,b)$를 지나는 직선이 직선 $x+2y-3=0$과 직교하고, 그 교점은 선분 AB를 $2:1$로 내분한다. 이때, $3a+b$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$\frac{b-2}{a-3}=2$

$b-2=2(a-3)$, $b=2a-4$ ······ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $2:1$로 내분하는 점은

$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3}\right)$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\frac{2a+3}{3}+2\,\frac{2b+2}{3}-3=0$,

$a+2b-1=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$

$\therefore\ 3a+b=5$

4. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$　② $-\frac{3}{23}$　③ $-\frac{1}{23}$　④ $\frac{2}{23}$　⑤ $\frac{1}{3}$

해설

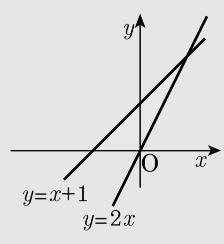
주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.
(ⅰ) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는
각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로
$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.
(ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
$x+2y=5$ 와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$
이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$
따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

5. 기울기가 각각 1, 2 인 두 직선이 한 점 (1, 2) 에서 만날 때, 두 직선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

기울기가 1, 2 인 두 직선은 $y = x + a$, $y = 2x + b$ 로 놓을 수 있고,
이 두 직선이 (1, 2) 를 지나므로 $a = 1$, $b = 0$
따라서 두 직선은 다음 그림과 같고 넓이 S 는



$\therefore\ S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

6. 두 이차함수 $y = -x^2 + 3$과 $y = x^2 - 4x + 3$의 그래프의 꼭지점을 각각 A, B라 할 때, 직선 AB의 x절편은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$y = -x^2 + 3$ 의 꼭지점은 $A(0, 3)$ 이고,
$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ 이므로 꼭지점은 $B(2, -1)$ 이다.
이 때, 두 점 $A(0, 3)$,$B(2, -1)$을 지나는
직선의 방정식은 $y = -2x + 3$
따라서, x절편은 $0 = -2x + 3$에서
$x = \frac{3}{2}$ 이므로 $\frac{3}{2}$ 이다.

7. 「$m,\ n$ 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $\mathrm{P}(m,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은
$\boxed{(가)}$ 이다. 따라서 $nx+my=mn\ (0<x<m,\ 0<y<n)$ 을 만족하는 자연수 $x,\ y$ 가 존재한다고 가정하면 $my=n(m-x)$
좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고,
$m,\ n$ 이 서로소이므로
$\boxed{(나)}$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<\boxed{(다)}$ 에 모순이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① $nx+my=1,\ \ m-x,\ \ m$
② $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
③ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m-x,\ \ m$
④ $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1,\ \ m+x,\ \ 2m$
⑤ $nx+my=1,\ \ m+x,\ \ n$

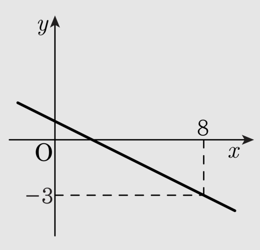
해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이
각각 $m,\ n$ 이므로
$\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1 \Leftrightarrow nx+my=mn$ ⋯⋯ ㉠
㉠을 만족하는 자연수 $x,\ y$ 가
존재한다고 가정하면
$my=n(m-x)$ 에서 $m,\ n$ 이 서로소이므로
$m-x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0<m-x<m$ 에 모순이다.

8. 점 $(8, -3)$ 을 지나고, x축, y축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 1 인 직선의 방정식으로 알맞은 것은?

① $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ ② $\frac{x}{2}+y=1$ ③ $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$
④ $x+\frac{y}{3}=1$ ⑤ $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$

해설



x절편이 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식은 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

이 직선이 점 $(8, -3)$ 을 지나므로

$\frac{8}{a}+\frac{(-3)}{b}=1 \cdots$ ㉠

두 좌표축과 직선이 이루는 삼각형의 넓이 S 는

$S=\frac{1}{2}ab=1 \cdots$ ㉡

㉡에서 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}b$

이것을 ㉠에 대입하면 $8\times\frac{1}{2}b-\frac{3}{b}=1$에서

$4b^2-b-3=0 \quad \therefore \ (4b+3)(b-1)=0$

$b>0$이므로 $b=1 \quad \therefore \ a=2$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\frac{x}{2}+y=1$

9. $ab < 0$, $bc < 0$ 일 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 이 지나지 않는 사분면을 구하면?

① 제1 사분면　② 제2, 3 사분면　③ 제4 사분면
④ 제3 사분면　⑤ 제3, 4 사분면

해설

$ax + by + c = 0 \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

$ab < 0$, $bc < 0$ 이므로 기울기는 양수, y 절편은 양수이다.

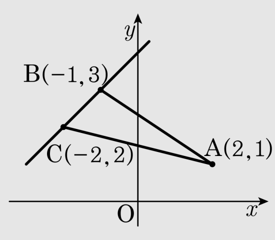
$\therefore$ 제4 분면은 지나지 않는다.

10. 두 점 A(2, 1), B(−1, 3)을 연결한 선분 AB 와 직선 $l : y = k(x+2)+2$ 가 공유점을 가질 k 의 범위는 $\alpha \le k \le \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값은?

① $\frac{3}{4}$　② 1　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$y = k(x+2)+2$, $k(x+2)+2-y=0$ 은
k 에 관계없이 $x+2=0$, $2-y=0$ 의 교점
즉, $(-2, 2)$ 를 지난다.
이 점을 C 라 하면 선분 AB 와 직선 l
이
만나려면 그림에서 l 의 기울기 k가
l_2 의 기울기보다 작거나 같아야하고,
l_3 의 기울기보다 크거나 같아야한다.



$\beta = (l_2 \text{ 의 기울기}) = \frac{2-3}{-2-(-1)} = 1$

$\alpha = (l_3 \text{ 의 기울기}) = \frac{2-1}{-2-2} = -\frac{1}{4}$

$\therefore\ \alpha + \beta = 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$

11. 직선 $(3k+1)x+(k-1)y+(2k+6)=0$는 k의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표는?

① $(2, 4)$ ② $(4, 2)$ ③ $(2, -4)$

④ $(4, -2)$ ⑤ $(-2, 4)$

해설

주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(3x+y+2)k+x-y+6=0$

k에 관계없이 성립하려면

$3x+y+2=0, \quad x-y+6=0$

위의 두 식을 연립하면 $x=-2 \ \ y=4$

$\therefore$ 항상 $(-2, 4)$를 지난다.