1. 연립부등식 $\begin{cases} -2(3-x) > 10 \\ \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} \le \frac{2}{3}x + 1 \end{cases}$ 의 해는?

① $x \le 2$　② $-4 \le x < 8$　③ 해가 없다.

④ $2 \le x < 8$　⑤ $x > 8$

해설

(i) $-(6-2x) > 10,\ x > 8$

(ii) $\frac{3}{4}x+\frac{5}{6} \le \frac{2}{3}x+1$에서 양변에 12를 곱하면 $9x+10 \le 8x+12$,
$x \le 2$

따라서 해가 없다.

2. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근 α,β 가 $-1<\alpha<0,\ 1<\beta<2$ 일 때 다음 중 옳은 것을 모두 고르면 ? (단, $a<0$)

㉠ $c<0$	㉡ $ab<0$
㉢ $a-b+c<0$	㉣ $a+2b+4c>0$

① ㉠ ② ㉡, ㉢ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$f(x)=ax^2+bx+c(a<0)$ 로 놓으면

$-1<\alpha<0, 1<\beta<2$ 에서

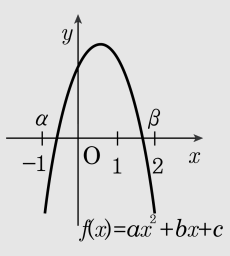
㉠) $f(0)=c>0$

㉡) 꼭짓점의 x좌표가 양이므로 $-\dfrac{b}{2a}>0\ \therefore ab<0$

㉢) $f(-1)=a-b+c<0$

㉣) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c>0,\ \dfrac{1}{4}(a+2b+4c)>0$

$\therefore a+2b+4c>0$



3. 연립부등식 $\frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2} \le a$의 해가 $-2 \le x < 1$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② 3 ③ 1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

연립부등식 $\frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2} \le a$ 를

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2} & \cdots ㉠ \\ \frac{5-x}{2} \le a & \cdots ㉡ \end{cases}$$

으로 바꾸어 연립부등식의 해를 구한다.

㉠을 풀면

$\frac{2x+4}{3} < \frac{5-x}{2}$, $4x+8 < 15-3x$, $7x < 7$

$\therefore\ x < 1 \cdots$ (i)

㉡을 풀면 $\frac{5-x}{2} \le a$, $5-x \le 2a$

$\therefore\ x \ge 5-2a \cdots$ (ii)

(i), (ii)를 모두 만족시키는 x의 범위는 $5-2a \le x < 1$이다.

연립부등식의 해가 $-2 \le x < 1$ 이므로 $5-2a = -2$

$\therefore\ a = \frac{7}{2}$

4. 부등식 $a(x^2-2x+1) > 2(x^2-2x-2)$를 만족하는 실수 x가 존재할 때, 상수 a의 범위는?

① $a > 2$　② $a \geq 2$　③ $a < 2$

④ a는 모든 실수　⑤ $a < \pm 2$

해설

$a = 2$일 때, $6 > 0$이므로 x는 모든 실수

$a \neq 2$일 때,

$(a-2)x^2 - 2(a-2)x + a + 4 = 0 \cdots$ ㉠에서

$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - (a-2)(a+4) = -6(a-2)$이므로

i) $a > 2$이면, x는 모든 실수

ii) $a < 2$이면, $\frac{D}{4} > 0$이므로 ㉠의 근을

$\alpha, \beta (\alpha < \beta)$라 하면

부등식의 해는 $\alpha < x < \beta$이므로 x값이 존재한다.

$\therefore$ a는 모든 실수

5. x에 대한 이차함수 $y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$의 값이 모든 실수 x에 대하여 항상 양이 되는 실수 a의 값의 집합을 A라 하고, 항상 음이 되는 실수 a 의 값의 집합을 B 라 할 때, $A \cup B$는?

① $\{a \mid a<6\}$ ② $\{a \mid a \le 6\}$ ③ $\{a \mid 3<a<6\}$

④ $\{a \mid 3 \le a \le 6\}$ ⑤ $\{a \mid a>3\}$

해설

$y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$이 이차함수이므로 $a \neq 3$

이 때, 이차방정식 $(a-3)x^2-2(a-3)x+3=0$의 판별식을 D라 하자.

(i) 항상 양일 경우

모든 실수 x에 대하여 항상 $y>0$이려면 $a-3>0$, 즉 $a>3$이고

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$

$(a-3)(a-3-3)<0$, $(a-3)(a-6)<0$

$\therefore 3<a<6$

$\therefore A=\{a \mid 3<a<6\}$

(ii) 항상 음일 경우

모든 실수 x에 대하여 항상 $y<0$이려면 $a-3<0$, 즉 $a<3$ 이고

$\frac{D}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$

$(a-3)(a-3-3)<0$, $(a-3)(a-6)<0$

$\therefore 3<a<6$

$\therefore B=\varnothing$

(i), (ii)에서 $A \cup B=\{a \mid 3<a<6\}$

6. x에 대한 연립부등식 $\begin{cases}(x+a)(x-4)<0\\(x-a)(x-3)>0\end{cases}$ 의 해가 $3<x<4$가 되도록 하는 실수 a 의 값의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M-m$의 값을 구하면?

① 3 ② -3 ③ 4 ④ -4 ⑤ -7

해설

$(x+a)(x-4)<0 \cdots\cdots$ ㉠
$(x-a)(x-3)>0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통해가 $3<x<4$이므로
$-a<4,\ a<3$ 이어야 한다.
$\therefore$ ㉠의 해는 $-a<x<4 \cdots\cdots$ ㉢
㉡의 해는 $x<a$ 또는 $x>3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣의 공통 범위가 $3<x<4$ 이려면
$-a\le 3,\ a\le -a$
$\therefore -3\le a\le 0$
$\therefore M=0,\ m=-3 \therefore M-m=3$

7. 세 변의 길이가 $x,\ x+1,\ x+2$인 삼각형이 둔각삼각형이 되는 x의 범위가 $\alpha < x < \beta$일 때,$\alpha+\beta$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0 \cdots\cdots$ ㉠
$x+2$가 최대변이므로
$x+2 < (x+1)+x \quad \therefore\ x > 1 \cdots\cdots$ ㉡
둔각삼각형이 되는 조건은
$(x+2)^2 > (x+1)^2 + x^2$
$\therefore\ -1 < x < 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 공통범위를 구하면
$1 < x < 3$
$\therefore\ \alpha = 1,\ \beta = 3$
$\therefore\ \alpha+\beta = 4$

8. 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 두 근이 모두 -1과 1사이에 있기 위한 k값의 범위가 $a<k\le b$라 할 때, ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$D/4 = k^2-k \ge 0, k(k-1)\ge 0,\ \therefore k\le 0,\ \ k\ge 1$

$f(x)=x^2+2kx+k$라 하면

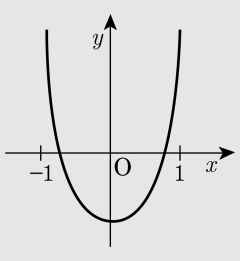
$f(-1)=1-k>0$

$\therefore\ k<1$

$f(1)=1+3k>0\ \therefore\ k>-\frac{1}{3}$

대칭축 $x=-k$ 이므로 $-1<-k<1$

$\therefore\ -1<k<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<k\le 0$

$\therefore\ ab=0$