1. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16　　② 8　　③ 4　　④ 2　　⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot 4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

2. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$가 x에 대한항등식이 되도록 실수 $a+b+c+p$의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$를 대입하면
$p^3 - p^2 + 2 = 0$
$(p+1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore\ p = -1$
따라서 주어진 식은
$x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
양변에 $x = 0$을 대입하면 $2 = a + b + c$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

해설

$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$
$= (x-p)\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$
$\therefore\ (x+1)(x^2 - 2x + 2)$
$= (x-p)\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$
양변을 비교하면, $x + 1 = x - p$,
$x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$
$\therefore\ p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
$= ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$
$\therefore\ a = 1,\ 2a + b = -2,\ a + b + c = 2$
$\therefore\ b = -4,\ c = 5$
따라서 $a = 1,\ b = -4,\ c = 5,\ p = -1$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

3. 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 P는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

연도	85	90	95
인구비율(%)	20.9	15.5	10.8
인구(1000명)	8521	6661	4851

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

해설

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,
$t = 0 \to 1985$년, $t = 1 \to 1990$년, $t = 2 \to 1995$년
$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,
$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서
$t = 0 \to 1990$년임을 알 수 있다.

4. $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1　　② 2　　③ -2　　④ -3　　⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면

$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$

$\therefore\ x = 1,\ y = 0$

$\therefore\ A(1, 0)$

(ii) $\mathrm{A}(1, 0), \mathrm{B}(b, 1)$에서

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

$b^2 - 2b = 0,\quad b(b-2) = 0\quad \therefore\ b = 0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

5. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$에 대입하여 정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

6. A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하고, Q를 B'으로 나눈 몫은 Q', 나머지는 R'이라 한다. A를 BB'으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R + R'B$ ② $R' + RB$ ③ RR'

④ R ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A = BQ + R \cdots\cdots$ ㉠

$Q = B'Q' + R' \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$A = B(B'Q' + R') + R$

$= (BB')Q' + (R + R'B)$

$R + R'B$가 A를 BB'로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$이어야 한다.

그런데 $R \le B - 1$, $R' \le B' - 1$이므로

$$R + R'B \le (B - 1) + (B' - 1)B$$
$$= BB' - 1 < BB'$$

따라서 A를 BB'으로 나눈 나머지는 $R + R'B$이다.

7. 다항식 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① x^4+5x^2+1 ② x^4+x^2-3 ③ x^4-5x^2+1
④ x^4+x^2+3 ⑤ 답 없음

해설

$x^2+1=t$라 하면 $x^2=t-1$
주어진 식에 대입하면
$f(t)=(t-1)^2+5(t-1)+3$
$\therefore\ f(t)=t^2+3t-1$

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2+3(x^2-1)-1 \\ &= x^4+x^2-3 \end{aligned}$$

8. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

9. $x^2 - x - 1 = 0$일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$의 값은?

① 4, −1 ② 4, 18 ③ 8, −1 ④ 9, −1 ⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$의 양변을 x로 나누면

$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$

$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$

$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

$y^3 + 1 = 0 \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$

$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$

10. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=9$, $a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69　② 70　③ 71　④ 72　⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots$①
$a^2+b^2+c^2=9 \cdots$②
$a^3+b^3+c^3=24 \cdots$③ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$④
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots$⑤
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot 6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times 3$
$=6)$

11. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면
$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$
$a^3+1=0$ $\therefore$ $a^3=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$
$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.
$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$
$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$
마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

12. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값을 구하면?

① 1　　② −1　　③ 1997

④ 0　　⑤ −1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})x^{2006}+\cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$

13. n이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b) = (x-3)^2Q(x) + 9^n(x-3)$

$x^{2n}(x-3)(x-\alpha) = (x-3)\,(x-3)Q(x) + 9^n\}$ 라 놓으면,

$x^{2n}(x-\alpha) = (x-3)Q(x) + 9^n$ 이고

양변에 $x=3$을 대입하면, $9^n(3-\alpha) = 9^n$

$\therefore\ 3-\alpha = 1,\quad \alpha = 2$

그러므로 $a=-5,\ b=6$이 된다.

따라서 $a+b=1$

14. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지도록 a, b의 값을 정할 때, $a + b$의 값을구하면?

① 1　　② -1　　③ 3　　④ -4　　⑤ -3

해설

(ⅰ) $f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$

$f(1) = 1 + a + b = 0$

$\therefore\ b = -(a+1)$

(ⅱ) $f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$

$= (x-1)^2 Q(x)$

$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$

$x = 1$을 대입하면 $4 + a = 0$ $\therefore\ a = -4$

$b = -(a+1)$에서 $b = 3$

$\therefore a + b = -1$

15. 임의의 실수 x에 대하여 $x^{11}+x=a_0+a_1(x+3)+a_2(x+3)^2+\cdots+a_{11}(x+3)^{11}$ 이 성립할 때, $a_1+a_3+\cdots+a_{11}$ 의 값은?

① $2^{22}-2^{11}+2$　② $2^{22}+2^{11}-2$　③ $2^{21}-2^{10}+1$
④ $2^{21}+2^{10}-1$　⑤ $2^{21}+2^{10}+1$

해설

주어진 식의 양변에 $x=-2,\ x=-4$를 각각 대입하면
$-2^{11}-2=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}\cdots$㉠
$-2^{22}-4=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_{11}\cdots$㉡
㉠ − ㉡에서 $2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=2^{22}-2^{11}+2$
$\therefore\ a_1+a_3+\cdots+a_{11}=2^{21}-2^{10}+1$