**1.** $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=1$, $xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot 4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

**2.** $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$가 $x$에 대한항등식이 되도록 실수 $a+b+c+p$의 값을 구하면?

① $-1$ ② $1$ ③ $-2$ ④ $2$ ⑤ $0$

해설

양변에 $x = p$를 대입하면
$p^3 - p^2 + 2 = 0$
$(p+1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore\ p = -1$
따라서 주어진 식은
$x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
양변에 $x = 0$을 대입하면 $2 = a + b + c$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

해설

$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
$\therefore\ (x+1)(x^2 - 2x + 2)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
양변을 비교하면, $x + 1 = x - p$,
$x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$
$\therefore\ p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
$= ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$
$\therefore\ a = 1,\ 2a + b = -2,\ a + b + c = 2$
$\therefore\ b = -4,\ c = 5$
따라서 $a = 1,\ b = -4,\ c = 5,\ p = -1$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

**3.** 1985년부터 1995년까지 5년 간격으로 조사한 우리나라의 농가인구 비율 $P$는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

| 연도 | 85 | 90 | 95 |
|---|---|---|---|
| 인구비율(%) | 20.9 | 15.5 | 10.8 |
| 인구(1000명) | 8521 | 6661 | 4851 |

$P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

이 때, $t = 0$은 1985년을 나타낸다. 이 식을 $t = 0$이 1990년을 나타내도록 변형하면?

① $P = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$

② $P = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$

③ $P = 0.35(t-1)^2 - 5.75(t-1) + 20.9$

④ $P = 0.35(t+2)^2 - 5.75(t+2) + 20.9$

⑤ $P = 0.35(t-2)^2 - 5.75(t-2) + 20.9$

**해설**

$P_1(t) = 0.35t^2 - 5.75t + 20.9$일 때,

$t = 0 \to 1985$년, $t = 1 \to 1990$년, $t = 2 \to 1995$년

$P_2(t) = 0.35(t+1)^2 - 5.75(t+1) + 20.9$이면,

$P_2(0) = P_1(1)$이므로 $P_2(t)$에서

$t = 0 \to 1990$년임을 알 수 있다.

**4.** $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$의 그래프는 $k$에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 $b$의 값들의 합을 구하면?

① 1　② 2　③ $-2$　④ $-3$　⑤ $-1$

해설

( i ) 준식을 $k$에 관하여 정리하면

$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$

이 식이 $k$의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$

$\therefore\ x = 1,\ y = 0$

$\therefore\ A(1, 0)$

( ii ) $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(b,1)$에서

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

$b^2 - 2b = 0,\quad b(b-2) = 0\quad \therefore\ b = 0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

**5.** $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 $x, y, z$에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 $z$에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$에 대입하여 정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

**6.** $A$를 $B$로 나눈 몫을 $Q$, 나머지를 $R$라 하고, $Q$를 $B'$으로 나눈 몫은 $Q'$, 나머지는 $R'$이라 한다. $A$를 $BB'$으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

① $R+R'B$ ② $R'+RB$ ③ $RR'$

④ $R$ ⑤ $R'$

**해설**

주어진 조건을 식으로 나타내면

$A=BQ+R$ ⋯⋯ ㉠

$Q=B'Q'+R'$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$A=B(B'Q'+R')+R$

$=(BB')Q'+(R+R'B)$

$R+R'B$가 $A$를 $BB'$로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R+R'B<BB'$이어야 한다.

그런데 $R\le B-1$, $R'\le B'-1$이므로

$$\begin{aligned}R+R'B &\le (B-1)+(B'-1)B\\ &=BB'-1<BB'\end{aligned}$$

따라서 $A$를 $BB'$으로 나눈 나머지는 $R+R'B$이다.

**7.** 다항식 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① $x^4+5x^2+1$ ② $x^4+x^2-3$ ③ $x^4-5x^2+1$

④ $x^4+x^2+3$ ⑤ 답 없음

해설

$x^2+1=t$라 하면 $x^2=t-1$

주어진 식에 대입하면

$f(t)=(t-1)^2+5(t-1)+3$

$\therefore\ f(t)=t^2+3t-1$

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2+3(x^2-1)-1 \\ &= x^4+x^2-3 \end{aligned}$$

**8.** 삼각형의 세 변의 길이 $a$, $b$, $c$에 대하여 $\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 $a$인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 $b$인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 $c$인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\dfrac{a-b+c}{a+b+c}=\dfrac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 $c$인 직각삼각형이다.

**9.** $x^2 - x - 1 = 0$ 일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ 의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$ 의 값은?

① 4, $-1$ ② 4, 18 ③ 8, $-1$ ④ 9, $-1$ ⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ 의 양변을 $x$ 로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$ 일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$ 에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$ 을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

$y^3 + 1 = 0\ \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

**10.** 세 실수 $a, b, c$가 $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=9$, $a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69 ② 70 ③ 71 ④ 72 ⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots ①$

$a^2+b^2+c^2=9 \cdots ②$

$a^3+b^3+c^3=24 \cdots ③$ 이라 하면,

②식에서

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$

$9-2(ab+bc+ca)=9$

$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots ④$

③식에서

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$24=3\cdot(9-0)+3abc$

$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots ⑤$

$a^4+b^4+c^4+1$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$

$=81-2\cdot 6+1=70$

$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=0-2\times(-1)\times 3$

$=6)$

**11.** $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

$b=1-a$ 를 $a^2+b^2$ 에 대입하여 정리하면

$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$

$a^3+1=0$ $\therefore$ $a^3=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

$a^3, b^3$ 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.

$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$

$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

**12.** 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 $x$에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\cdots+\frac{a_{2007}}{x-2007}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\cdots+a_{2007}$의 값을 구하면?

① 1 ② $-1$ ③ 1997

④ 0 ⑤ $-1997$

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})x^{2006}+\cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$a_1+a_2+\cdots+a_{2007}=0$

**13.** $n$이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+9^n(x-3)$

$x^{2n}(x-3)(x-\alpha)=(x-3)\,(x-3)Q(x)+9^n\}$라 놓으면,

$x^{2n}(x-\alpha)=(x-3)Q(x)+9^n$이고

양변에 $x=3$을 대입하면, $9^n(3-\alpha)=9^n$

$\therefore\ 3-\alpha=1,\quad \alpha=2$

그러므로 $a=-5,\ b=6$이 된다.

따라서 $a+b=1$

**14.** 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지도록 $a, b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값을구하면?

① 1　　② $-1$　　③ 3　　④ $-4$　　⑤ $-3$

**해설**

(i) $f(x) = x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x)$

$f(1) = 1 + a + b = 0$

$\therefore\ b = -(a+1)$

(ii) $f(x) = x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x^4 - 1) + a(x-1) = (x-1)^2 Q(x)$

$(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1)$

$= (x-1)^2 Q(x)$

$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1 + a = (x-1)Q(x)$

$x = 1$을 대입하면 $4 + a = 0\ \ \therefore\ a = -4$

$b = -(a+1)$에서 $b = 3$

$\therefore a + b = -1$

**15.** 임의의 실수 $x$에 대하여 $x^{11}+x=a_0+a_1(x+3)+a_2(x+3)^2+\cdots+a_{11}(x+3)^{11}$ 이 성립할 때, $a_1+a_3+\cdots+a_{11}$ 의 값은?

① $2^{22}-2^{11}+2$　② $2^{22}+2^{11}-2$　③ $2^{21}-2^{10}+1$

④ $2^{21}+2^{10}-1$　⑤ $2^{21}+2^{10}+1$

**해설**

주어진 식의 양변에 $x=-2,\ x=-4$를 각각 대입하면

$-2^{11}-2=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}\cdots$ ㉠

$-2^{22}-4=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_{11}\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=2^{22}-2^{11}+2$

$\therefore\ a_1+a_3+\cdots+a_{11}=2^{21}-2^{10}+1$