

1. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

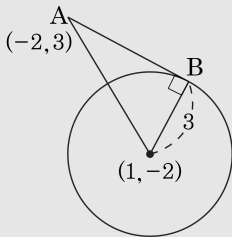
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



2. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ 에 직선 $y = mx$ 가 접하도록 상수 m 의 값을 정할 때, 모든 m 의 값의 합은?

① $-\frac{12}{5}$

② -2

③ 0

④ 2

⑤ $\frac{12}{5}$

해설

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

이것은 중심이 $(-3, 2)$,

반지름의 길이가 2 인 원이다.

이 원에 직선 $y = mx$ 가 접하므로

원의 중심 $(-3, 2)$ 와 직선 $mx - y = 0$ 사이의
거리는 반지름의 길이인 2 와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|-3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2$$

$$|-3m - 2| = 2\sqrt{m^2 + 1} \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변을 제곱하여 정리하면

$$5m^2 + 12m = 0 \quad \therefore m = 0, -\frac{12}{5}$$

따라서 구하는 모든 m 의 값의 합은 $-\frac{12}{5}$ 이다.

3. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = 2x + k$ 과 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위를 구하면?

① $k = \sqrt{5}$

② $k = -\sqrt{5}$

③ $k = 2\sqrt{5}$

④ $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$

⑤ $k > \sqrt{5}, k < \sqrt{5}$

해설

원과 직선이 두 점에서 만나려면 직선과 원의 중심 사이의 거리가 반지름보다 작아야 한다.

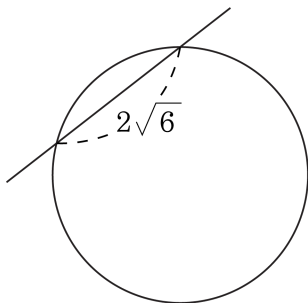
⇒ 직선과 중심 사이의 거리는

$$\frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} < 1$$

$$\Rightarrow |k| < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$$

4. 원 $x^2 + y^2 = 16$ 이 직선 $l: ax - y - 5(a - 1) = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 정수 a 의 값은?



① -2

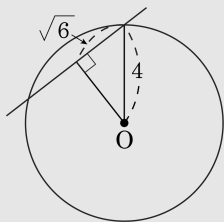
② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설



원의 중심에서 직선까지 거리

$$\sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$$

$ax - y - 5(a - 1) = 0$ 에서

$$\frac{|-5(a - 1)|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$$25(a - 1)^2 = 10(a^2 + 1), 15a^2 - 50a + 15 = 0$$

$$3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$$(3a - 1)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3$$

5. 방정식 $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 이 나타내는 원 중 최대인 원을 C라 할 때, C 위의 점 P에서 점 Q(-2, -3) 까지의 거리의 최솟값을 구하면?

- ① $2(\sqrt{2} - 1)$ ② $2(\sqrt{3} - 1)$ ③ $2(\sqrt{5} - 1)$
 ④ $2(\sqrt{6} - 1)$ ⑤ $2(\sqrt{7} - 1)$

해설

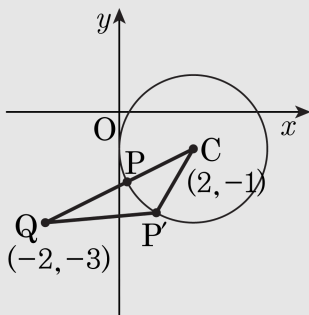
$x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 에서

$$\{x + (m-1)\}^2 + (y-m)^2 = -m^2 - 2m + 3$$

반지름의 길이를 r 라고 하면

$$r^2 = -m^2 - 2m + 3 = -(m+1)^2 + 4$$

즉, $m = -1$ 일 때, $r = 2$ 로 최대이다.



한편, 원 C의 중심을 O라 할 때 그림에서와 같이

$\overline{CQ}$ 와 원 C의 교점을 P라 하면,

원, C 위의 임의의 점 P'에 대하여

$$\overline{CP} = \overline{CP'} = 2 \text{ 이고}$$

$$\overline{CQ} = \overline{CP} + \overline{PQ} \leq \overline{CP'} + \overline{P'Q} \text{ 이므로}$$

$$\overline{PQ} \leq \overline{P'Q}$$

따라서, P가 $\overline{CQ}$ 와 원 C의 교점일 때,

$\overline{PQ}$ 의 길이가 최소이다.

중심 (2, -1) 과 점 Q(-2, -3) 까지의 거리는

$$\sqrt{(2+2)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{5} - 2 = 2(\sqrt{5} - 1)$