

1. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기
 위한 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a > -1$ ② $a < -1$ ③ $a > \frac{3}{2}$
 ④ $a < \frac{3}{2}$ ⑤ $a > -2$

해설

$$\begin{cases} x+y=2 & \dots \textcircled{A} \\ ax-y=3 & \dots \textcircled{B} \end{cases}$$

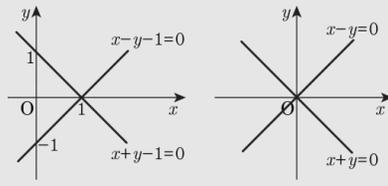
$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 에서 $(a+1)x=5$
 $\therefore x = \frac{5}{a+1} \dots \dots \dots \textcircled{C}$
 \textcircled{C} 을 \textcircled{A} 에 대입하면 $\frac{5}{a+1} + y = 2$
 $\therefore y = 2 - \frac{5}{a+1}$
 그런데 $x > 0, y > 0$ 이므로
 $\frac{5}{a+1} > 0, 2 - \frac{5}{a+1} > 0$ 에서,
 $a > \frac{3}{2}$

2. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1) = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 의 개수는?

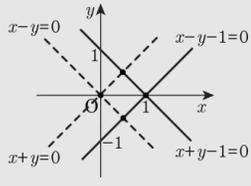
- ① 무한히 많다. ② 0 개 ③ 1 개
 ④ 2 개 ⑤ 4 개

해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개이다.

3. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

(가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다.
 (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

- ① (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 1680$
 ② (가) $25x + 3y = 10500$, (나) $x + y = 3360$
 ③ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$
 ④ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 3360$
 ⑤ (가) $25x + 3y = 15000$, (나) $x + y = 1680$

해설

시속 30 km \Rightarrow 분속 500 m
 (가) $\frac{x}{60} + 3 + \frac{y}{500} = 10$, $\frac{x}{60} + \frac{y}{500} = 7$
 $\therefore 25x + 3y = 10500$
 (나) $\frac{x+y}{60} = 28$
 $\therefore x + y = 1680$

4. 200m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

- ① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
 $3x - 3y = 200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
 $x + y = 200$
$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \frac{400}{3}$ m/분
 $\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}/\text{분} = \frac{0.4\text{km}}{3} \times 60/\text{시간} = 8 \text{ km/h}$

5. 연립방정식 $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ 의 근 x, y 가 $xy = a, x + y = b$ 를 만족할 때, $a - b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 & \dots \text{㉠} \\ x^2 + y^2 = 25 & \dots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠식을 정리해서

$y = 2x - 5$ 를 ㉡식에 대입한다.

$$x^2 + (2x - 5)^2 = 25,$$

$$5x^2 - 20x = 0, x(x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 0, 4$$

$$\text{i) } x = 0 \text{ 일 때, } y = -5$$

$$\therefore a = 0, b = -5$$

$$\therefore a - b = 5$$

$$\text{ii) } x = 4 \text{ 일 때, } y = 3$$

$$\therefore a = 12, b = 7$$

$$\therefore a - b = 5$$

6. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $x = \sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$

② $x = 2, y = 1$

③ $x = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$

④ $x = -2, y = -1$

⑤ $x = 2, y = -1$

해설

$$x^2 - xy - 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = -y \text{ 또는 } x = 2y$$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm\sqrt{3}, x = \mp\sqrt{3}$$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$$y = \pm 1, x = \pm 2$$

$$\therefore \text{해는 } \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ (복호동순)}$$

7. 방정식 $x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

① -7 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} &x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0 \text{에서} \\ &x^2 + 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \\ &(x + 2y)^2 + (y - 1)^2 = 0 \\ &x + 2y, y - 1 \text{은 실수이므로 } x + 2y = 0, y - 1 = 0 \\ &\therefore y = 1, x = -2y = -2 \\ &\therefore x + y = -1 \end{aligned}$$

8. 사차방정식 $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 해는?

- ① $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$
② $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
③ $x = \frac{-15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
④ $x = \frac{15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
⑤ $x = 15 \pm \sqrt{221}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 8x + 17 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0$$

$\therefore x + \frac{1}{x} = A$ 라 하자.

$$A^2 + 8A + 15 = (A + 3)(A + 5)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 5\right) = 0$$

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

9. 삼차방정식 $x^3 + (p-4)x - 2p = 0$ 의 중근을 α , 다른 한 근을 β 라 할 때 $\alpha + \beta + p$ 의 값을 구하면?

- ① -10 또는 -2 ② -10 또는 -1 ③ -10 또는 2
④ -10 또는 4 ⑤ -10 또는 5

해설

$f(x) = x^3 + (p-4)x - 2p$ 로 놓으면 $f(2) = 0$ 이므로
 $f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + p) = 0$
따라서 $x = 2, x^2 + 2x + p = 0$
그런데 중근을 가져야 하므로
i) $x = 2$ 가 $x^2 + 2x + p$ 의 근일 때
 $2^2 + 2 \times 2 + p = 0$
 $\therefore p = -8, f(x) = (x-2)(x^2 + 2x - 8) = (x-2)^2(x+4)$
 $\therefore \alpha = 2, \beta = -4$
따라서, $\alpha + \beta + p = 2 + (-4) + (-8) = -10$
ii) $x^2 + 2x + p = 0$ 이 중근을 가질 때
 $D/4 = 0$ 이므로 $D/4 = 1 - p = 0$
 $\therefore p = 1, f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 1) = (x-2)(x+1)^2$
 $\therefore \alpha = -1, \beta = 2, p = 1$
따라서, $\alpha + \beta + p = -1 + 2 + 1 = 2$
i) ii)로부터 $\alpha + \beta + p$ 의 값은 -10 또는 2이다.

10. 연립방정식 $x+y+z = -\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx = -\frac{5}{2}$, $xyz = -1$ 을 만족시키는 해의 쌍 (x,y,z) 의 개수는?

- ① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서
 x, y, z 를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$$t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2) = 0$$

$\therefore (x,y,z) =$

$$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right), \left(1, -2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right), \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right),$$

$$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

11. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?

- ① $x^5 + y^5 = 1$ ② $x^7 + y^7 = 1$ ③ $x^9 + y^9 = 1$
④ $x^{11} + y^{11} = 1$ ⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다

$\therefore x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\therefore x^3 = y^3 = -1, x + y = 1, xy = 1$

① : $x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$

② : $x^7 + y^7 = (x^3)^2x + (y^3)^2y = x + y = 1$

③ : $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$

④ : $x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$

⑤ : $x^{13} + y^{13} = (x^3)^4x + (y^3)^4y = x + y = 1$

12. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3 = 1$

㉡ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉢ $\bar{\omega} = \omega^2 = \frac{1}{\omega}$

㉣ $\omega + \bar{\omega} = 1$

㉤ $\omega\bar{\omega} = 1$

㉥ $\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}} = -1$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$\begin{aligned}
 x^3 = 1 &\Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots \text{㉠}(\bigcirc) \\
 x^3 - 1 = 0 &\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \\
 &\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots \text{㉡}(\bigcirc) \\
 \therefore \text{근과 계수와의 관계에 의해} \\
 \omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1 \cdots \text{㉢}(\times), \text{㉣}(\bigcirc) \\
 \omega + \bar{\omega} = -1 \text{이므로} \\
 \omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \bar{\omega} + 1 = 0 \\
 \Rightarrow \omega^2 = \bar{\omega} \cdots \text{㉤}(\bigcirc) \\
 \omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}} \\
 = (\omega^3)^{668} \omega + \frac{1}{(\omega^3)^{668} \omega} \\
 = \omega + \frac{1}{\omega} = -1 \\
 (\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots \text{㉥}(\bigcirc)
 \end{aligned}$$

13. p 가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$ 이 오직 한 개의 공통근 α 를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\alpha^2 + p\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + p = 0$$

$$\alpha(p-3) - (p-3) = (\alpha-1)(p-3) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ or } p = 3$$

$$p = 3 \text{ 이면 두 다항식이 같아지므로 } \alpha = 1$$

$$\therefore 1 + p + 3 = 0 \quad \therefore p = -4$$

$$\therefore \alpha - p = 1 - (-4) = 5$$

14. 방정식 $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값은?

- ① $x = 2, y = 4$ ② $x = 4, y = 2$ ③ $x = -1, y = 2$
④ $x = 2, y = -1$ ⑤ $x = -2, y = 1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,
 $2x^2 - 4(y+2)x + 5y^2 - 4y + 20 = 0 \dots$ ①

①이 실근을 가지므로 $\frac{D}{4} \geq 0$ 에서

$$4(y+2)^2 - 10y^2 + 8y - 40 \geq 0$$

$$6y^2 - 24y + 24 \leq 0$$

$$6(y^2 - 4y + 4) \leq 0$$

$$6(y-2)^2 \leq 0 \quad \therefore y = 2 \quad (\because y \text{는 실수})$$

$y = 2$ 를 ①에 대입하면,

$$2x^2 - 16x + 32 = 0, \quad 2(x-4)^2 = 0$$

$$\therefore x = 4$$

15. 서로 다른 세 정수 a, b, c 에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c) = 2$ 가 정수근을 가질 때, 이 근은?

- ① $\frac{a+b+c}{3}$ ② $\frac{a+b+c-1}{3}$ ③ $\frac{a+b+c-2}{3}$
④ $\frac{a+b+c-3}{3}$ ⑤ $\frac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a < b < c$ 라 가정했을때, 정수근을 α 라고 하면, $(\alpha - a)(\alpha - b)(\alpha - c) = 2$ 를 만족하는 순서쌍은 $(1, -1, -2)$ 밖에 없다.

$$\Rightarrow \alpha - a = 1$$

$$\alpha - b = -1$$

$$\alpha - c = -2$$

세 식을 다 더하면,

$$3\alpha = a + b + c - 2, \alpha = \frac{a + b + c - 2}{3}$$