1. $(x-3)+(y-2)i=2+5i$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $2x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 10 ② 12 ③ 15 ④ 17 ⑤ 20

해설

$x-3=2,\ y-2=5$

$\therefore\ x=5,\ y=7$

$\therefore\ 2x+y=17$

2. 복소수 $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 에 대하여 z^2 을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $z^2 = i$

해설

$z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 이므로 $z^2 = \dfrac{1+2i-1}{2} = i$

3. $z = 1 + i$ 일 때, $\dfrac{z\overline{z}}{z - \overline{z}}$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $1 + i$ ② $1 - i$ ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$z = 1 + i$이면 $\overline{z} = 1 - i$이다.

$$\therefore \quad \frac{z\overline{z}}{z - \overline{z}} = \frac{(1+i)(1-i)}{(1+i)-(1-i)} = \frac{2}{2i} = -i$$

4. $x^2 - 5x + 6 = 0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$

5. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 않은 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로

$D=(-3)^2+4\cdot 1\cdot(k-1)\geq 0$

$9+4k-4\geq 0,\ 4k\geq -5$

$\therefore\ k\geq -\dfrac{5}{4}$

6. 이차방정식 $x^2+4x+k=0$이 허근을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k>4$

해설

$$\frac{D}{4}=2^2-k<0$$

$\therefore\ k>4$

7. 이차방정식 $2x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$은?

① -9 ② -2 ③ 0 ④ 5 ⑤ 13

해설

$\alpha+\beta=3, \quad \alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-4=5$

8. $-x+5 \geq 3$, $2x-3 \geq 7$ 에 대하여 연립부등식의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\varnothing$

해설

$-x+5 \geq 3,\ \ x \leq 2$

$2x-3 \geq 7,\ \ x \geq 5$

$\therefore$ 해는 없다.

9. 부등식 $4-x \le 3x-4 < 2x+2$ 를 풀면?

① $x \le 2$ ② $x \ge 2$ ③ $2 \le x < 6$

④ $x \le 6$ ⑤ $x \ge 6$

해설

$4-x \le 3x-4 < 2x+2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4-x \le 3x-4 \\ 3x-4 < 2x+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x-3x \le -4-4 \\ 3x-2x < 2+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x \le -8 \\ x < 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x < 6 \end{cases}$$

$\therefore\ 2 \le x < 6$

10. 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2+4x-4 \ge 0 \\ (x+1)^2 < 4 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \le -1,\ \dfrac{2}{3} < x < 1$

② $-1 < x \le -3,\ \dfrac{2}{3} \le x < 2$

③ $-2 < x \le 0,\ \dfrac{1}{3} < x < 1$

④ $-3 < x \le -2,\ \dfrac{2}{3} \le x < 1$

⑤ $-4 < x \le -2,\ \dfrac{1}{3} < x < 1$

해설

$\begin{cases} 3x^2+4x-4 \ge 0 \cdots (가) \\ (x+1)^2 < 4 \cdots (나) \end{cases}$

(가)에서 $(x+2)(3x-2) \ge 0$이므로

$x \le -2$ 또는 $x \ge \dfrac{2}{3}$

(나)에서 $-2 < x+1 < 2$,

$-3 < x < 1$이므로

$-3 < x \le -2,\ \dfrac{2}{3} \le x < 1$

11. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

$$y = -(x-1)(x+3)$$
$$= -x^2 - 2x + 3$$
$$= -(x+1)^2 + 4$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

12. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　　② $-1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　　③ $-1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1　　⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

13. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$$

$$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$$

$\therefore\ a+b=-10$

14. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다
② $x = 3$
③ $x \neq 3$인 모든실수
④ $-3 < x < 3$
⑤ 모든 실수

해설

$(x-3)^2 \geq 0$, $(\text{실수})^2 \geq 0$이므로
$\therefore$ ⑤ 모든실수

15. 모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \ge 0$이 항상 성립하려면 다음 중 어떤 조건을 만족해야 하는가?

① $p<q$　② $p^2 \le q$　③ $p \le q^2$

④ $p^2 \le 4q$　⑤ $p^2 \ge 4q^2$

해설

모든 실수 x, y에 대하여 $x^2+pxy+qy^2 \ge 0$이 항상 성립하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+pxy+qy^2=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(py)^2-4qy^2 \le 0$

$(p^2-4q)y^2 \le 0 \cdots$ ㉠

㉠이 모든 실수 y에 대하여 성립하려면

$p^2-4q \le 0$이어야 한다.

$\therefore p^2 \le 4q$

16. 다항식 $2x^3+ax^2+x+b$가 x^2-x+1로 나누어떨어질 때, $a-b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$2x^3+ax^2+x+b$

$=(x^2-x+1)(2x+c)$

$=2x^3+(c-2)x^2+(2-c)x+c$

$\therefore\ a=c-2,\ 1=2-c,\ b=c$

$c=1$이므로 $a=-1, b=1$

$\therefore\ a-b=-2$

17. 다항식 $2x^{30}+2x^{28}-x$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2x^{30}+2x^{28}-x=(x+1)\,Q(x)+R$

양변에 $x=-1$을 대입 하면,

$2+2+1=R$ $\therefore\ R=5$

양변에 $x=1$을 대입 하면,

$2+2-1=2Q(1)+5$

$\therefore\ Q(1)=-1$

18. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x) - 2$는 $x - 1$로 나누어떨어지므로

$f(1) - 2 = 0 \therefore\ 1 + a + b - 2 = 0$

$\therefore\ a + b = 1 \cdots$ ①

$f(x) + 2$는 $x + 1$로 나누어떨어지므로

$f(-1) + 2 = 0 \therefore\ 1 - a + b + 2 = 0$

$\therefore\ -a + b = -3 \cdots$ ②

①, ② 에서 $a = 2,\ b = -1$

$\therefore\ a - 2b = 4$

19. x^4-8x^2-9를 x에 대한 일차식만의 곱으로 인수분해할 때, 계수는 다음 중 어떤 수라 할 수 있는가?

① 정수 ② 유리수 ③ 무리수
④ 실수 ⑤ 복소수

해설

$$\begin{aligned} x^4-8x^2-9 &= (x^2-9)(x^2+1) \\ &= (x+3)(x-3)(x^2+1) \\ &= (x+3)(x-3)(x+i)(x-i) \end{aligned}$$

∴복소수

20. 최대공약수가 $x-2$이고, 최소공배수가 x^3+2x^2-5x-6인 두 다항식 A, B에 대하여 $A=x^2+x-6$일 때, 다항식 B를 구하면?

① x^2-x-2　② x^2-x+2　③ x^2+2x-1

④ $2x^2-x-1$　⑤ x^2+x+1

해설

조립제법을 이용한다.

2	1	2	-5	-6
		2	8	6
-1	1	4	3	0
		-1	-3	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3+2x^2-5x-6=(x-2)(x+1)(x+3)$

$A=x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

$B=(x-2)(x+1)=x^2-x-2$

$\therefore\quad B=(x-2)(x+1)=(x^2-x-2)$

21. 두 다항식 A, B의 최대공약수가 $x+1$이고, 곱이 $x^4+x^3-7x^2-13x-6$이다. A, B의 최소공배수를 $f(x)$라 할 때, $f(3)$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$AB = LG,\ G = x+1$

$$AB = x^4+x^3-7x^2-13x-6$$
$$= (x+1)^2(x+2)(x-3)$$

$f(x) = (x+1)(x+2)(x-3),\ f(3) = 0$

22. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서

$$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$$

B는 a와 b는 바르게 읽었으므로

$$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$$

따라서 원래의 이차방정식은

$$ax^2 + 6ax - 28a = 0$$

근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

23. 축의 방정식이 $x = 3$ 이고, 원점을 지나는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 최솟값이 -1 일 때, 이 이차함수의 식을 $y = ax^2 + bx + c$ 라 하면 상수 a, b, c 의 합 $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{9}$

해설

$y = a(x-3)^2 - 1$

$9a - 1 = 0 \therefore a = \frac{1}{9}$

$y = \frac{1}{9}(x^2 - 6x + 9) - 1$

$y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x$

$a = \frac{1}{9}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 0$

$\therefore a + b + c = -\frac{5}{9}$

24. 실수 x, y가 $x^2+2y^2-2xy-4=0$을 만족시킬 때, x의 최댓값과 y의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2}-1$ ② $2\sqrt{2}+1$ ③ $2\sqrt{2}+2$
④ $\sqrt{2}+4$ ⑤ $\sqrt{2}+5$

해설

$x^2+2y^2-2xy-4=0$을
(i) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2-2yx+2y^2-4=0$에서 x가 실수이므로
$$\frac{D}{4}=y^2-(2y^2-4)\geq 0,\ y^2\leq 4$$
$\therefore\ -2\leq y\leq 2$
따라서, y의 최댓값은 2이다.
(ii) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$2y^2-2xy+x^2-4=0$에서 y가 실수이므로
$$\frac{D'}{4}=x^2-2(x^2-4)\geq 0,\ x^2\leq 8$$
$\therefore\ -2\sqrt{2}\leq x\leq 2\sqrt{2}$
따라서, x의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.
(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2}+2$

25. 자연수 $N = 5 \cdot 29^3 + 15 \cdot 29^2 + 15 \cdot 29 + 5$의 양의 약수의 개수는?

① 20 개 ② 40 개 ③ 60 개

④ 80 개 ⑤ 100 개

해설

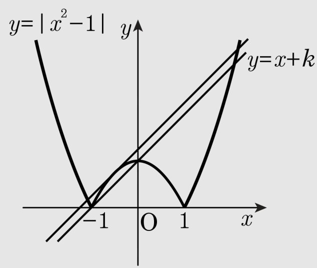
주어진 N 의 값을 직접 계산하여 다시 소인수분해 하기는 너무 복잡하므로,
주어진 수들을 하나의 문자로 생각하여 5로 묶으면
$N = 5(29^3 + 3 \cdot 29^2 + 3 \cdot 29 + 1)$
$= 5(29+1)^3$
$= 5 \cdot 30^3$
$= 5 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$
$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4$
따라서 N의 양의 약수의 개수는
$(3+1)(3+1)(4+1) = 80$

26. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$ ② $1\le k\le\frac{5}{4}$ ③ $-5<k<-\frac{5}{4}$
④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여
분리하면
$|x^2-1|=x+k,\ y=|x^2-1|,\ \ y=$
$x+k$
이 두 함수가 4개의 교점을 가지
려면
다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1,\ \ y=x+k$가
두 점에서 만나야하므로
$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0 \qquad \therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k \qquad \therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

27. $y = x^2 + 2ax + a$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{4}$

해설

$y = x^2 + 2ax + a = (x+a)^2 - a^2 + a$

최솟값은 $-a^2 + a$ 이다.

즉, $m = -a^2 + a = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 이다.

$\therefore a = \frac{1}{2}$ 일 때, m 은 최댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

28. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z)=10 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=24 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 라 할 때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

① ± 2 ② ± 4 ③ ± 8 ④ ± 16 ⑤ ± 32

해설

$$\begin{cases} x(y+z)=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ y(z+x)=18 & \cdots\cdots ㉡ \\ z(x+y)=24 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢ : $2(xy+yz+zx)=52$

$\therefore\ xy+yz+zx=26$

$\therefore\ xy=2,\ yz=16,\ zx=8$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $(xyz)^2=16^2$ $\quad\therefore\ xyz=\pm 16$

$\therefore\ x=\alpha=\pm 1,\ y=\beta=\pm 2,\ z=\gamma=\pm 8$ (복부호동순)

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=\pm 16$

29. 두 부등식 $0.7-x \leq -2-0.1x$, $\dfrac{2+x}{3} \geq x+a$의 공통 부분이 없을 때, a의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$0.7-x \leq -2-0.1x7-10x \leq -20-x-9x \leq -27,\ \ x \geq 3$

$\dfrac{2+x}{3} \geq x+a2+x \geq 3x+3a-2x \geq 3a-2,\ \ x \leq 1-\dfrac{3}{2}a$

공통 부분이 없으므로 $1-\dfrac{3}{2}a < 3$,

$-\dfrac{3}{2}a < 2$

$\therefore\ \ a > -\dfrac{4}{3}$

따라서 가장 작은 정수 a의 값은 -1이다.

30. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=9,\ a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69 ② 70 ③ 71 ④ 72 ⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots$ ①
$a^2+b^2+c^2=9 \cdots$ ②
$a^3+b^3+c^3=24 \cdots$ ③ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$ ④
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots$ ⑤
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot 6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times 3$
$=6)$

31. $a+b=1,\ a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2000}+b^{2006}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a+b=1$ 에서 $b=1-a$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 이므로

$a^2+(1-a)^2=-1,\ 2a^2-2a+2=0,\ a^2-a+1=0$

이 식의 양변에 $a+1$ 을 곱하면

$(a+1)(a^2-a+1)=0,\ a^3+1=0$

같은 방법으로 하면

$b^3+1=0$ 이므로 $a^3=-1,\ b^3=-1$

$\therefore a^{2000}+b^{2006}=(a^3)^{666}\cdot a^2+(b^3)^{668}\cdot b^2$

$=a^2+b^2=-1$

32. 가을 전어철을 맞아 전어의 어획량은 매일 현재 어획량의 10% 씩 늘어나고, 마리당 판매 가격은 매일 현재 가격의 5% 씩 줄어들고 있다. 며칠 후에 전어를 한꺼번에 팔아야 최대의 수입을 얻을 수 있는지 구하여라.

▶ **답 :** 일

▷ **정답 :** 5 일

해설

현재의 전어의 양과 가격을 각각 m마리, p원 라고 할 때, x 일 후의 전어의 양과 가격은 각각

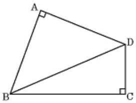
$m\left(1+\frac{1}{10}x\right)$마리, $p\left(1-\frac{1}{20}x\right)$ 원 이다.

이때, x 일 후의 수입을 y 원이라고 하면

$$\begin{aligned} y &= mp\left(1+\frac{1}{10}x\right)\left(1-\frac{1}{20}x\right) \\ &= mp\left(1+\frac{1}{20}x-\frac{1}{200}x^2\right) \\ &= -\frac{mp}{200}(x^2-10x-200) \\ &= -\frac{mp}{200}(x-5)^2+\frac{9}{8}mp \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 5 일 후에 팔면 최대의 수입을 얻을 수 있다.

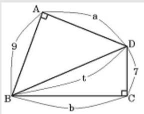
33. 네 변의 길이는 서로 다른 자연수이고, $\overline{AB}=9$, $\overline{CD}=7$, $\angle BAD=\angle BCD=90°$이 사각형 ABCD가 있다. 대각선 BD의 길이를 t라 할 때, t^2의 값을 구하면?



① 83 ② 85 ③ 87 ④ 120 ⑤ 130

해설

$\overline{AD}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BD}=t$라 할 때,



$9^2+a^2=7^2+b^2$, $b^2-a^2=32$

(자연수이므로, $b>a$)

$(b-a)(b+a)=32 \;\Rightarrow$ 부정방정식

$b>a$이므로

$b-a$, $b+a$ 모두 자연수이므로,

곱이 32가 되는 수의 조합은

$1\times32=32$, $2\times16=32$, $4\times8=32$, $\cdots$

$b-a=4$, $b+a=8$일 때 조건이 성립하므로,

$a=2$, $b=6$이다.

$b+a=16$, $b-a=2$일 때도

성립하나, 서로 다른 자연수 조건에 위배하므로,

$\therefore\; t^2=9^2+2^2=81+4=85$