1. $-1 < x < 3$일 때, $A = 2x - 3$의 범위는?

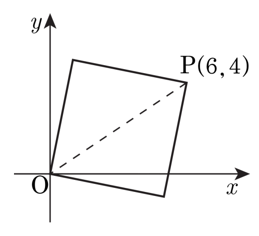
① $1 < A < 3$ ② $-1 < A < 3$ ③ $-3 < A < 5$
④ $-5 < A < 3$ ⑤ $3 < A < 5$

해설
$-1 < x < 3$에서 양변에 2를 곱하고 3을 빼면
$-2 - 3 < 2x - 3 < 6 - 3$
$\therefore\ -5 < 2x - 3 < 3$

2. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?

① 16　② 20　③ 26

④ 32　⑤ 52



해설

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a라고 하면
$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

3. 두 점 $A(1,\ -3)$, $B(3,\ 7)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $2:3$으로 내분하는 점 $P(a,\ b)$와 $2:3$으로 외분하는 점 $Q(c,\ d)$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① $-\frac{134}{5}$　② $-\frac{116}{5}$　③ $\frac{134}{5}$　④ $\frac{116}{5}$　⑤ 20

해설

$$P\ (a,\ b)=\left(\frac{2\times3+3\times1}{2+3},\frac{2\times7+3\times(-3)}{2+3}\right)$$
$$=\left(\frac{9}{5},\ 1\right)$$
$$Q\ (c,\ d)=\left(\frac{2\times3-3\times1}{2-3},\frac{2\times7-3\times(-3)}{2-3}\right)$$
$$=(-3,\ -23)$$
$$\therefore\ a+b+c+d=\frac{9}{5}+1-3-23=-\frac{116}{5}$$

4. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ 3　④ $2\sqrt{3}$　⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x-a)^2 + (y-1)^2 = 5^2$
이 점$(0, -3)$ 을 지나므로 $(0-a)^2 + (-3-1)^2 = 25$
$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

5. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots$ ㉠

양변에 $x = 2$를 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \quad \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2 = 2\,(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots a_{14} = 1$

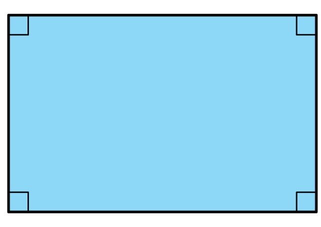
6. $(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면$(\alpha>\beta)$?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$
$(-x^2-3ax+5)+(x^2-3x+2)i=0$
$-x^2-3ax+5=0\cdots$ ⓐ
$x^2-3x+2=0\cdots$ ⓑ
ⓑ을 인수분해하면,
$(x-1)(x-2)=0,\ \therefore\ x=1,\ 2$
ⓐ에 대입하면,
$x=1$일 때, $-1-3a+5=0,\ \therefore\ a=\frac{4}{3}$
$x=2$일 때, $-4-6a+5=0,\ \therefore\ a=\frac{1}{6}$
$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3},\beta=\frac{1}{6}(\because\ \alpha>\beta)$
$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

7. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 10 인 직사각형의 최대 넓이는?



① $\frac{25}{4}$ ② $\frac{25}{2}$ ③ 25 ④ 50 ⑤ 100

해설

두 변의 길이를 x , $10-x$, 넓이를 y 라 하면

$y = x(10-x)$

$= -(x^2-10x)$

$= -(x^2-10x+25-25)$

$= -(x-5)^2+25$

$\therefore$ (최대 넓이) $= 25$

8. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1　② 0　③ -1　④ -2　⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$

$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$

$Y=2$ 또는 $Y=6$

(i) $Y=2$

$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$

(ii) $Y=6$

$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$

$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+1 \ge 1 \end{cases}$ 의 해가 자연수일때, 해의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 2개

해설

$\begin{cases} 3(x-2) \le x-2 \\ x+1 \ge 1 \end{cases} \to \begin{cases} 3x-x \le -2+6 \\ x \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} x \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$

$\therefore\ 0 \le x \le 2$

따라서 자연수인 해는 1, 2로 모두 2개이다.

10. 부등식 $|x^2-4x-6| \leq 6$ 의 해를 구하면?

① $-2 \leq x < 6$

② $0 \leq x \leq 4$

③ $x \leq -2$또는$x \geq 6$

④ $-2 \leq x \leq 0$또는$4 \leq x \leq 6$

⑤ $x \leq 0$또는$x \geq 4$

해설

$|x^2-4x-6| \leq 6$ 에서

$$\underbrace{-6 \ \langle\ x^2-4x-6}_{㉠}\ \leq\ 6$$

㉡

㉠에서 $x^2-4x \geq 0, x(x-4) \geq 0$

$\therefore x \leq 0$또는$x \geq 4$

㉡에서 $x^2-4x-12 \leq 0, (x+2)(x-6) \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 6$

따라서 공통 범위를 구하면

$-2 \leq x \leq 0$ 또는 $4 \leq x \leq 6$

11. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$ 이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로

$-k = -3$

$\therefore k = 3$

12. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면

분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.

즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

13. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a\neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a,b의 합은?

① 12 ② −12 ③ 15 ④ −15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로
$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore\ \omega^2=-\omega-2$
$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$
$\quad\quad =(b-a)\omega+(12-2a)$
$f(\omega)=3\omega$이므로
$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$
$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because$ ω는 허수)
$\therefore\ a=6,\ b=9$

14. $x = 1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$y = a(x-1)^2 - 1 = ax^2 - 2ax + a - 1$

$a - 1 = 3$, $a = 4$

$y = 4(x-1)^2 - 1$

$\therefore apq = 4 \times 1 \times (-1) = -4$

15. 연립부등식 $\begin{cases} 5x - a < 11 \\ x - b < 3(x-3) \end{cases}$ 의 해가 $1 < x < 3$이다. $-ax + b \geq 0$을 만족하는 정수 중 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$5x < a + 11$, $x < \dfrac{a+11}{5}$

$x - b < 3x - 9$, $9 - b < 2x$, $\dfrac{9-b}{2} < x$

$\dfrac{a+11}{5} = 3 \qquad \therefore\ a = 4$

$\dfrac{9-b}{2} = 1 \qquad \therefore\ b = 7$

$a = 4$, $b = 7$을 $-ax + b \geq 0$에 대입하여 정리하면

$-4x + 7 \geq 0$

$x \leq \dfrac{7}{4}$이므로 만족하는 정수 중 최댓값은 1이다.

16. 두 점 A(1, 0), B(4, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π　② $2\sqrt{3}\pi$　③ 4π　④ $2\sqrt{5}\pi$　⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을 지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(\frac{2\times4+1\times1}{2+1},\ 0\right)=(3,\ 0)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(\frac{2\times4-1\times1}{2-1},\ 0\right)=(7,\ 0)$

$\therefore$ 중심은 (5, 0) 이고, 반지름은 2 인 원

$\Rightarrow$ 둘레의 길이는 $2\times2\times\pi=4\pi$

17. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1,\ f(2) = 2, f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는?

① 9　　② 10　　③ 11　　④ 12　　⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(i) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ii) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(iii) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

18. 이차함수 $y = 2x^2 - ax - b$ 는 $x = -p$ 일 때, 최솟값 -2를 갖고, 그래프는 점 $(1, p^2)$ 을 지난다. 이때, 상수 a , b , p 의 합 $a+b+p$ 의 값을 구하면? (단, $p<0$)

① 12 ② 0 ③ −18 ④ 42 ⑤ −14

해설

$y = 2(x+p)^2 - 2$

$$\begin{aligned} p^2 &= 2(1+p)^2 - 2 \\ &= 2(p^2+2p+1) - 2 \\ &= 2p^2 + 4p \end{aligned}$$

$p^2 + 4p = 0,\ p(p+4) = 0,\ p = 0,\ -4$

$\therefore\ p = -4(\because p<0)$

$$\begin{aligned} y &= 2(x-4)^2 - 2 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16) - 2 \\ &= 2x^2 - 16x + 30 \end{aligned}$$

$a = 16$, $b = -30$

$\therefore a+b+p = 16 + (-30) + (-4) = -18$

19. 9 시에 문을 여는 극장에 8 시 30 분부터 1 분에 10 명씩 사람들이 몰려와 줄을 서기 시작하고, 이후에도 계속 시간당 같은 인원이 꾸준히 극장에 온다. 9 시부터 3 개의 표 발매 창구에서 표를 팔면 9 시 15 분에 줄 서 있는 사람이 없어질 것으로 예상된다. 이때, 줄 서 있는 사람이 없어지는 시간을 7 분 앞당기려면 발매 창구를 최소 몇 개 더 열어야 하는지 구하여라. (단, 창구 하나당 발매하는 표의 수는 모두 같다.)

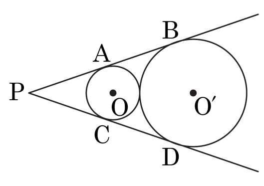
▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 2 개

해설

9 시에 발매를 시작하기 전에 이미 줄 서 있는 사람 수가 $30 \times 10 = 300$ (명) 이고
1 분 동안 발매하는 표가 x 장이라고 하면
3 개의 발매 창구에서 표를 팔면 15 분 동안 모두 판매하므로
$3 \times 15x = 300 + 15 \times 10 \quad 45x = 450 \qquad \therefore x = 10$,
한편 모두 판매하는 시간을 7 분 앞당기면 8 분 동안 모두 판매해야 하므로
발매 창구의 개수를 a 개라 하면
$a \times 10 \times 8 \geq 300 + 10 \times 8, 80a \geq 380$
$\therefore a \geq \dfrac{19}{4}$
따라서 발매창구가 적어도 5 개 있어야 하므로 최소 2 개의 발매 창구를 더 열어야 한다.

20. 다음 그림과 같이 외접하는 두 원 O, O′ 의 공통외접선의 교점을 P , 접점을 A, B, C, D 라고 하자. $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{AB}} = 4\,\mathrm{cm}$ 일 때, 원 O 의 넓이를 구하면?



① $\pi\,\mathrm{cm}^2$ ② $2\pi\,\mathrm{cm}^2$ ③ $3\pi\,\mathrm{cm}^2$

④ $4\pi\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $5\pi\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\triangle$POA 와 $\triangle$PO′B 는 닮음이고 닮음비는 1 : 2 이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{OA}} = r$ 이라 하면, $\overline{\mathrm{O'B}} = 2r$

다음 그림에서 $4^2 + r^2 = 9r^2$

$\Rightarrow\ r = \sqrt{2}$

$\therefore$ 원 O 의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$