1. 일차방정식 $a^2x+1=a^4-x$ 의 해는? (단, a 는 실수)

① a ② $a+1$ ③ $a-1$
④ a^2-1 ⑤ a^2+1

해설

$a^2x+1=a^4-x$ 에서 $a^2x+x=a^4-1$
$(a^2+1)x=(a^2-1)(a^2+1)$
$\therefore x=a^2-1(\because a^2+1>0)$

2. x에 대한 이차방정식 $x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<0$ ② $k>0$ ③ $0<k<\frac{1}{4}$

④ $k\le 0$ ⑤ $k\ge 0$

해설

$x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이

허근을 가져야 하므로

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$kx^2-kx+\frac{1}{4}(k+1)=0$

$D=(-k)^2-4k\cdot\frac{1}{4}(k+1)<0$

$=k^2-k^2-k=-k<0 \quad \therefore k>0$

$\therefore k>0$

3. α, β를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

② $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이면 $\alpha=r,\ \beta=\delta$

③ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

④ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

⑤ $\alpha^2<0$

해설

① $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

② $\alpha=1,\ \beta=1$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i$ 이고, $r=2,\ \delta=-1+i$ 이면 $r+\delta i=1+i$ 에서 $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이지만 $\alpha\neq r,\ \beta\neq\delta$ 이다.

③ $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha^2+\beta^2=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

④ $\alpha\neq 0$ 이고 $\beta\neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta=0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta=0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.

⑤ $(\text{순허수})^2<0$ 이나 $\alpha=1+i$ 이면 $\alpha^2=(1+i)^2=2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

4. 이차방정식 $x^2+kx+3k-11=0$의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2+kx+3k-11=0$의 두 근을 α, β라고 하면
$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=3k-11$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=k^2-12k+44=(k-6)^2+8$
따라서 $k=6$일 때 $(\alpha-\beta)^2$는 최소

해설

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$이므로
$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{k^2-12k+44}}{1}$
$\therefore\ k^2-12k+44$가 최소이려면 $k=6$

5. 복소수 α,β 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단 $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
>
> ㉡ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
>
> ㉢ $\overline{\alpha}=\alpha$ 이면 α 는 실수이다.
>
> ㉣ $\overline{a}=\beta$ 이면 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

① ㉠,㉡,㉢ ② ㉠,㉢,㉣ ③ ㉡,㉢,㉣
④ ㉠,㉡,㉢,㉣ ⑤ ㉢,㉣

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha^2+\beta^2=0$
㉡ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha+\beta i=0$
㉢ $\overline{\alpha}=\alpha \rightarrow \alpha$ 는 실수(참)
㉣ $\alpha=a+bi,\ \overline{a}=\beta=a-bi(a,b$는 실수)
$\alpha+\beta=2a$(실수), $\alpha\beta=a^2+b^2$(실수) (참)