1. x의 범위가 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$일 때, 부등식 $2x \le 5x-3$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$2x \le 5x-3,\ -3x \le -3$

$\therefore\ x \ge 1$

따라서 이 부등식을 만족하는 해는 1이다.

2. 연속하는 세 홀수의 합이 45 보다 크고 55 보다 작을 때, 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

▷ 정답 : 17

▷ 정답 : 19

해설

연속하는 세 홀수를 $x-2, x, x+2$ 라 하면

$45 < (x-2) + x + (x+2) < 55$

$45 < 3x < 55$

$\rightarrow \begin{cases} 45 < 3x \\ 3x < 55 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 15 \\ x < \dfrac{55}{3} \end{cases} \rightarrow 15 < x < \dfrac{55}{3}$

$\therefore\ x = 16,\ 17,\ 18$

x 는 홀수이므로 17 이다.

따라서 세 홀수는 15 , 17 , 19 이다.

3. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-6 \le 0 \\ |x-1| \le 3 \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① $-3 \le x \le 2$ ② $-2 \le x \le 2$ ③ $-1 \le x \le 2$
④ $0 \le x \le 2$ ⑤ $2 \le x \le 3$

해설

$x^2+x-6 \le 0$ 에서
$(x+3)(x-2) \le 0$
$-3 \le x \le 2 \cdots$ ㈎
$|x-1| \le 3$ 에서
$-3 \le x-1 \le 3$
$-2 \le x \le 4 \cdots$ ㈏
㈎, ㈏에서 $-2 \le x \le 2$

4. 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$의 교점을 지나고, 직선 $x+y+1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $x+y+3=0$ ② $x-y+3=0$ ③ $x+y-3=0$
④ $x-y-3=0$ ⑤ $2x+y+3=0$

해설

두 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(5x+2y+1)+k(2x-y+4)=0$
$\therefore\ (5+2k)x+(2-k)y+(1+4k)=0\cdots$ ㉠
이 직선이 $x+y+1=0$ 에 수직이므로
$(-1)\times\dfrac{2k+5}{k-2}=-1$
$\therefore\ k=-7\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은 $x-y+3=0$
(보충)
두 직선 $ax+by+c=0,\ \ a'x+b'y+c'=0$ 의 교점을 지나는 직선은
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$

5. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

6. 세 점 P $(-1,4)$, Q $(3,6)$, R $(0,-3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$PQR 의 외접원의 방정식은?

① $x^2+y^2-x-2y-3=0$

② $x^2+y^2+2x-1y-10=0$

③ $x^2+y^2-4x-5y-8=0$

④ $x^2+y^2-6x-2y-15=0$

⑤ $x^2+y^2-6x-5y-20=0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$
으로 놓으면 이 원이
세 점 P $(-1,4)$, Q $(3,6)$, R $(0,-3)$을
지나므로 차례로 대입하면

$1+16-A+4B+C=0 \quad \cdots ㉠$

$9+36+3A+6B+C=0 \quad \cdots ㉡$

$9-3B+C=0 \quad \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$A=-6, B=-2, C=-15$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$x^2+y^2-6x-2y-15=0$

7. 다음 연립부등식 중 해가 없는 것을 모두 골라라.

㉠ $\begin{cases} 2x+3 \geq x+8 \\ 3x+1 \leq x+7 \end{cases}$

㉡ $\begin{cases} -2(x+3) \geq -3x+1 \\ x+1 < 2x-5 \end{cases}$

㉢ $\begin{cases} 3(2x+9) \geq 5(x+5)+4 \\ x+3 \geq 3(x-\frac{1}{3}) \end{cases}$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

해설

㉠ $\begin{cases} 2x+3 \geq x+8 \\ 3x+1 \leq x+7 \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$ → 해가 없다.

㉡ $\begin{cases} -2(x+3) \geq -3x+1 \\ x+1 < 2x-5 \end{cases}$

$\to \begin{cases} -2x-6 \geq -3x+1 \\ x+1 < 2x-5 \end{cases}$

$\to \begin{cases} x \geq 7 \\ x > 6 \end{cases} \to x \geq 7$

㉢ $\begin{cases} 3(2x+9) \geq 5(x+5)+4 \\ x+3 \geq 3(x-\frac{1}{3}) \end{cases}$

$\to \begin{cases} 6x+27 \geq 5x+25+4 \\ x+3 \geq 3x-1 \end{cases}$

$\to \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \to x = 2$

따라서 해가 없는 연립부등식은 ㉠이다.

8. 다음 그림과 같이 두 점 A , B 가 수직선 상에 위치해 있다. 선분 AB 를 2 : 3으로 내분하는 점을 D , 선분 AB 를 2 : 3 으로 외분하는 점을 E , 선분 AB 를 3 : 2 로 내분하는 점을 F , 선분 AB 를 3 : 2 로 외분하는 점을 G 라 하자. 점 D, E, F, G를 수직선 위에서 왼쪽부터 순서대로 적으시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 점 E

▷ 정답 : 점 D

▷ 정답 : 점 F

▷ 정답 : 점 G

해설

다음 그림에서 보듯이, 점의 순서는 E, D, F, G 이다.

9. 평행사변형 ABCD 의 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(-3,0)$, $\mathrm{B}(-2,-2)$, $\mathrm{C}(5,\ -2)$, $\mathrm{D}(a,\ b)$ 이고, 선분 AC 의 중점 $\mathrm{M}(c,\ d)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

평행사변형은 밑변과 윗변이 평행하면서 길이가 같아야 한다.
$\mathrm{A}(-2-1,\ -2+2)$ 이므로 $\mathrm{D}(5-1,\ -2+2)$ 에서
$\mathrm{D}(4,0)$ 임을 알 수 있다.
중점을 구하는 공식을 사용하면
$c=\{5+(-3)\}\div 2=1$,
$d=\{0+(-2)\}\div 2=-1$
따라서 $a+b+c+d=4+0+1+(-1)=4$

10. 직선 $l : 4x - y + 4 = 0$에 수직이고 점 $(3,\ -2)$을 지나는 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는?

① $(-1, 0)$ ② $(-3, 0)$ ③ $(-5, 0)$
④ $(-7, 0)$ ⑤ $(-9, 0)$

해설

직선 $l : 4x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4x + 4$의 기울기가 4이므로,
이 직선에 수직인 직선은 기울기가 $-\frac{1}{4}$이므로
구하고자 하는 직선은 $y = -\frac{1}{4}(x-3) - 2$이다.
정리하면 $y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$이다.
이 직선이 x축과 만나는 점은 $y = 0$일 때 이므로
$0 = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$에서 $x = -5$
$\therefore$ x축과의 교점은 $(-5, 0)$

11. 두 점 $A(-3,\ -2), B(9,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식을 구하면?

① $(x+3)^2+(y+5)^2=10$　② $(x+6)^2+(y+9)^2=20$
③ $(x+2)^2+(y+4)^2=40$　④ $(x+5)^2+(y+5)^2=60$
⑤ $(x+7)^2+(y+4)^2=80$

해설

조건을 만족하는 점 $P(x, y)$ 라고 하면
$\overline{AP} = \sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}$
$\overline{BP} = \sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}$
이때, $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 에서 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로
$2\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-9)^2+(y-4)^2}$
양변을 제곱하면
$4\left\{(x+3)^2+(y+2)^2\right\} = (x-9)^2+(y-4)^2$
전개하여 정리하면
$x^2+y^2+14x+8y-15=0$
따라서, 구하는 자취의 방정식은
$(x+7)^2+(y+4)^2=80$

12. 평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+2,\ y-3)$ 에 의하여 직선 $x+ay+b=0$ 이 직선 $x-2y+10=0$ 으로 옮겨졌다고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 12　　② 14　　③ 16　　④ 18　　⑤ 20

해설

평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+2,\ y-3)$ 에 의하여
직선 $x+ay+b=0$ 은
$(x-2)+a(y+3)+b=0$ 으로 옮겨진다.
이 식을 정리하면 $x+ay+3a+b-2=0$ 이다.
이 식은 $x-2y+10=0$ 과 같은 식이므로
계수를 비교하면 $a=-2,\ 3a+b-2=10$
$\therefore\ a=-2,\ b=18$　　$\therefore\ a+b=16$

13. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

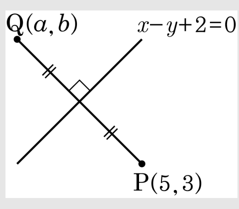
$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 1 \cdots\cdots$ ㉠
㉠은 원 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 과
직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이므로
두 원의 중심 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의
중점이 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 위에 있다.
두 점 $(5, 4), (-1, 8)$ 을 이은 선분의 중점은
$\left(\frac{5+(-1)}{2}, \frac{4+8}{2}\right)$, 즉 $(2, 6)$ 이므로
$3 \cdot 2 + a \cdot 6 + 6 = 0$
$\therefore a = -2$

14. 직선 $x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=7$

해설



$x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라면

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+3}{2}\right)$ 이

직선 위에 있으므로 대입하면

$\dfrac{a+5}{2}-\dfrac{b+3}{2}+2=0$

$\rightarrow\ a-b+6=0\cdots$㉠

($\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$\times 1=-1$ 이므로

($\because\ \overline{\mathrm{PQ}}$ 와 직선이 수직)

$\dfrac{b-3}{a-5}\times 1=-1\ \rightarrow\ a+b-8=0\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=1,\ b=7$

$\therefore\ ab=7$

15. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

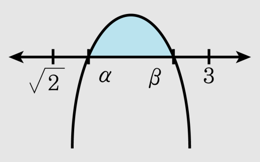
㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$　　㉡ $ac > 0$

㉢ $4a + c < 2b$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이 $a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.



㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.

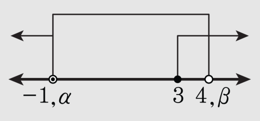
㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$

16. 두 부등식 $x^2-2x-3>0$,
$x^2+ax+b \le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3<x\le 4$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6　② -7　③ -8　④ -9　⑤ -10

해설

$(x+1)(x-3)>0 \Rightarrow \quad x<-1$ 또는 $x>3$
$x^2+ax+b\le 0 \Rightarrow \alpha \le x \le \beta$ 라 하자
주어진 조건을 만족하려면



$\therefore \alpha=-1, \beta=4$
$(x+1)(x-4)=x^2-3x-4$
$a=-3, b=-4$
$\therefore a+b=-7$

17. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $\mathrm{D}>0$에서 $\dfrac{\mathrm{D}}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ \ 6a>-13$

$\therefore a>-\dfrac{13}{6}$

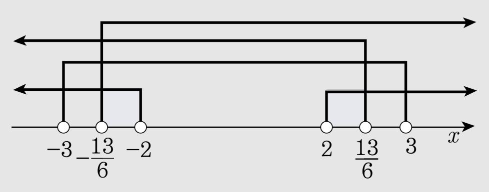
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\quad \therefore \dfrac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\dfrac{(-2a)}{2}=a$ 에서

$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\dfrac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\dfrac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

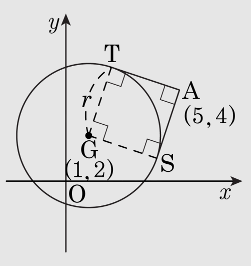
18. 좌표평면 위에 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$과 원 밖의 점 $A(5,4)$가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 원의 반지름의 길이 r의 값은?

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{12}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

좌표평면 그림으로 나타내면 점 A에서 그은 접선이 서로 수직이므로 원의 중심 G, 접점 S와 T, 점 A로 이루어지는 □GSAT는 한 변의 길이가 r인 정사각형이다.

$\therefore\ r=\dfrac{\overline{GA}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{10}$



해설

중심을 C라 하고 두 접점을 각각 T, T′이라고 하면 점 C의 좌표는 $(1,2)$이므로

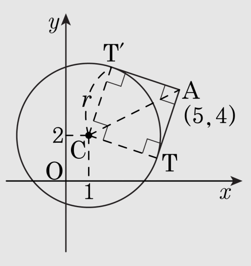
$\overline{CA}=\sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$

점 A에서 원에 두 점선을 그었으므로 $\overline{AT}=\overline{AT'}$

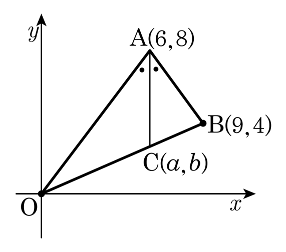
사각형 T′CTA는 네 각의 크기가 같고 네 변의 길이가 같은 정사각형이므로 $\angle CAT=45°$

직각삼각형 CAT에서 $\overline{CT}=r$이므로

$r=\overline{CA}\sin 45°=2\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}$



19. 다음 그림과 같이 세 점 O(0, 0), A(6, 8), B(9, 4)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$AOB가 있다. $\angle$A 의 이등분선이 변 OB 와 만나는 점을 C(a, b) 라 할 때, ab 의 값은?



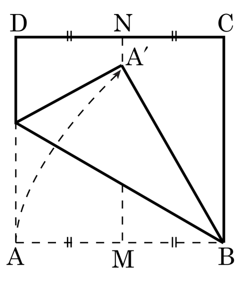
① 12 ② 14 ③ 15

④ 16 ⑤ 18

해설

$\angle$OAC $=$ $\angle$BAC 이므로 $\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OC}} : \overline{\mathrm{CB}}$가 성립한다.
이때, $\overline{\mathrm{AO}} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(9-6)^2 + (4-8)^2} = 5$ 이므로
점 C 는 $\overline{\mathrm{OB}}$ 를 $10 : 5$,
즉 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.
따라서 점 C 의 좌표는
$\mathrm{C}\left(\frac{2\times 9 + 1\times 0}{2+1}, \frac{2\times 4 + 1\times 0}{2+1}\right)$
$\therefore$ $\mathrm{C}\left(6, \frac{8}{3}\right)$ $\therefore$ $ab = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16$

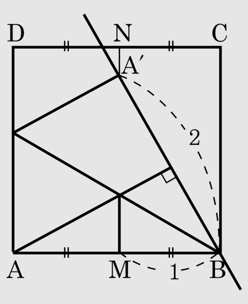
20. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 모양의 종이를 꼭지점 A 가 선분 MN 위에 놓이도록 접었을 때, 점 A 가 선분 MN 과 만나는 점을 A′ 이라 하자. 이 때, 점 A 와 직선 A′B 사이의 거리는? (단, M 은 선분 AB 의 중점, N 은선분 CD 의 중점이다.)



① $\sqrt{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

해설

정사각형 ABCD 를 좌표평면 위에 놓자. 점 M 을 원점으로 하고 직선 AB 를 x 축 위에 잡으면



$\overline{AM} = \overline{MB} = 1$ 이므로

$A(-1,\ 0),\ B(1,\ 0)$

$\overline{A'B} = \overline{AB} = 2$, $A'(0,\ \sqrt{3})$ 이다.

직선 A′B 의 방정식은 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$ 이므로,

점 A 에서 직선 A′B 사이의 거리는

$$\frac{\left|-\sqrt{3} - \sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$$