

1. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 의 값은?

- ① $a = 1, b = 2$ ② $a = 0, b = 3$ ③ $a = -1, b = 2$
④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 판별식이 0이다.

$$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, \quad a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

2. x 가 실수일 때, 복소수 $(1+i)x^2 + 2(2+i)x + 3 - 3i$ 를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$(\text{준식}) = (x^2 + 4x + 3) + (x^2 + 2x - 3)i$$

i 가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.

$$\therefore x^2 + 4x + 3 = 0 \text{ 이고 } x^2 + 2x - 3 \neq 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = -3 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x \neq 1 \text{ 그리고 } x \neq -3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $x = -1$ 이다.

3. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$ 일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$$(a-2)(x-a)=0$$

$$\Rightarrow a=2 \text{ 또는 } x=a$$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

4. n 이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$ 의 값은?

① -2

② $-\sqrt{2}$

③ 0

④ 2

⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1} \\ &= \left\{ \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left\{ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \right\}^{2n} \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (\pi^2)^{2n} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \{(-\pi)^2\}^{2n} \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

5. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$ 을 간단히 하면?

- ① $\frac{1}{\beta}$ ② $\frac{2}{\beta}$ ③ β ④ 2β ⑤ β^2

해설

$$\beta^2 - \beta + 1 = 0$$

$$\alpha\beta = 1 \text{ 에서 } \beta = \frac{1}{\alpha},$$

$$\beta^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 + \beta + \beta^2 = 2\beta$$

$$(\because \beta^2 + 1 = \beta)$$

해설

(별해1)

$$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha} \quad (\because \alpha^2 - \alpha + 1 = 0)$$

$$\alpha\beta = 1 \text{ 에서 } \beta = \frac{1}{\alpha}$$

$$\therefore \frac{2}{\alpha} = 2\beta$$

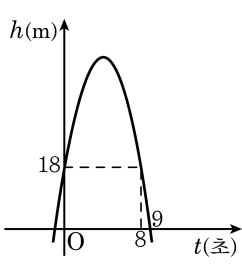
(별해2)

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ 의 근은 } \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ 라 하면}$$

$$\frac{2}{\alpha} = \frac{2}{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} = 1 - \sqrt{3}i = 2\beta$$

6. 다음은 지면으로부터 18m 의 높이에서 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이 h m 을 그래프로 나타낸 것이다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.



▶ 답 : 초

▶ 답 : m

▷ 정답 : 4초

▷ 정답 : 50m

해설

이차함수의 식을 $h = at^2 + bt + c$ 로 놓고 세 점 (0, 18), (8, 18), (9, 0) 의 좌표를 각각 대입하면

$18 = c$, $18 = 64a + 8b + c$, $0 = 81a + 9b + c$ 이므로 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = 16$, $c = 18$ 이다.

즉, $h = -2t^2 + 16t + 18 = -2(t - 4)^2 + 50$

따라서 $t = 4$ 일 때, h 는 최댓값 50 을 갖는다.

7. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$ 이 허근을 갖기 위한 k 의 값이 될 수 없는 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$ 에서 $x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$

$x=1$ 일때 성립하므로 $x-1$ 을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면

$$(x-1)(x^2-2x+k)=0$$

허근을 가지려면 $x^2-2x+k=0$ 의 판별식이 0보다 작아야

$$\text{하므로 } D' = 1-5+k < 0$$

$$\therefore k < 4$$

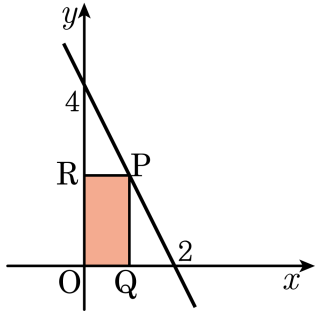
8. 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{21}$ (단, $x < y$)을 만족하는 양의 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x + y$ 의 최댓값을 구하면?

① 484 ② 192 ③ 112 ④ 100 ⑤ 548

해설

$21(x + y) = xy, \quad xy - 21(x + y) = 0$
 $\therefore (x - 21)(y - 21) = 21^2 = 3^2 \times 7^2$
 $21x = (x - 21)y$ 이고 $y > x > 0$ 이므로
 $y - 21 > x - 21 > 0$
 $\therefore (x - 21, y - 21)$
 $= (1, 441), (3, 147), (7, 63), (9, 49)$
 $\therefore (x, y)$
 $= (22, 462), (24, 168), (28, 84), (30, 70)$
 $\therefore x + y$ 의 최댓값은 $22 + 462 = 484$

9. 직선 $y = -2x + 4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 사각형 OQPR의 넓이의 최댓값은?



- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= x(-2x + 4) \quad (0 < x < 2) \\ &= -2x^2 + 4x \\ &= -2(x^2 - 2x + 1 - 1) \\ &= -2(x - 1)^2 + 2 \\ x &= 1 \text{ 일 때 최댓값 } 2 \end{aligned}$$

10. A가 서울에서 부산으로 출발하고, B는 A보다 30분 늦게 부산에서 서울로 출발했다. A와 B는 낮 12시에 도중에서 만난 후 A는 오후 3시에 부산에, B는 오후 1시 40분에 서울에 각각 도착했다고 한다면 A가 서울을 출발한 시각은? (단, A와 B의 속력은 각각 일정하다.)
- ① 9시 ② 9시 30분 ③ 10시
- ④ 10시 30분 ⑤ 11시

해설

A, B의 속도를 각각 x /시, y /시
A가 출발한 후 B를 만날 때까지의 시간을
 t (시간)라 하면 A가 B를 만나기 직전까지
움직인 거리 xt 를 가는데 B는 1시간 40분 걸렸으므로
 $xt = \frac{5}{3}y \cdots \text{㉠}$
또, B가 A를 만나기 직전까지 움직인 거리
 $y\left(t - \frac{1}{2}\right)$ 을 가는데
A는 3시간 걸렸으므로
 $y\left(t - \frac{1}{2}\right) = 3x \cdots \text{㉡}$
 $\text{㉠}, \text{㉡}$ 에서 $xyt\left(t - \frac{1}{2}\right) = 5xy$
 $\Leftrightarrow t\left(t - \frac{1}{2}\right) = 5$
 $2t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t + 2)(2t - 5) = 0$
 $\therefore t = \frac{5}{2}$
따라서, A가 B를 만날 때까지 걸린 시간이 2시간 30분이므로
A가 서울을 출발한 시간은 9시 30분이다.