

1. 이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와

직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은

이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$$\therefore 3a + b = -5 \cdots \text{㉠}$$

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$$\therefore a = -2$$

$$\text{㉠에서 } b = 1 \text{ 이므로 } a + b = -1$$

2. $a^2 + b^2 = 5$ 인 관계에 있는 두 실수 a, b 에 대하여 $f(x) = x^2 - 4ax + b^2$ 의 최솟값을 상수 k 라 할 때, k 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4ax + b^2 \\ &= (x - 2a)^2 + b^2 - 4a^2 \text{에서} \\ k &= b^2 - 4a^2 = (5 - a^2) - 4a^2 = -5a^2 + 5 \\ \therefore \text{따라서 } k \text{의 최댓값은 } 5 \end{aligned}$$

3. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$ 인 이차함수 $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 의 최솟값이 -1 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(1, b)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1, b = -2$

② $a = 1, b = 2$

③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 1, b = -2$

⑤ $a = -2, b = 2$

해설

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - 4ax + 4a + 3 \\ &= a(x-2)^2 + 3 \quad (0 \leq x \leq 3) \text{ 이므로} \\ x &= 0 \text{ 일 때 최솟값은 } -1 \text{ 을 갖는다.} \end{aligned}$$

$$-1 = 4a + 3$$

$$\therefore a = -1$$

점 $(1, b)$ 를 지나므로

$$\therefore b = a + 3 = 2$$

4. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$$

$$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$$g(a) = -(a-2)^2 + 6 \text{ 에서}$$

$g(a)$ 의 최댓값은 6이다.

5. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ -9 ⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,
 $t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3$.
 t 의 범위는 x 에 의해 $1 \leq t \leq 5$ 가 된다.
 $\begin{cases} t = 2 \text{일때, } y = -3 \\ t = 5 \text{일때, } y = 6 \end{cases}$
 $\therefore M \times m = -18$

6. $x^2 + 2y^2 = 4$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $4x + 2y^2$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① -8

② -4

③ 0

④ 4

⑤ 8

해설

$$x^2 + 2y^2 = 4 \text{에서 } 2y^2 = 4 - x^2$$

이때, y 는 실수이므로 $2y^2 = 4 - x^2 \geq 0$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2$$

$$4x + 2y^2 = 4x + 4 - x^2 = -(x - 2)^2 + 8$$

$$(-2 \leq x \leq 2)$$

따라서 $x = -2$ 일 때, 최솟값 $m = -8$ 이고,

$x = 2$ 일 때, 최댓값 $M = 8$ 이므로 $M + m = 0$

7. x, y 가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x+2)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0$$

$$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$$

따라서 $x = -2, y = 3$ 일 때

주어진 식의 최댓값은 1 이다.

8. $y = 0$, $y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 가 2개일 때, 정수 k 의 최댓값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$y = (k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식 $(k - 2)x^2 - 6(k - 1)x + 9k + 1 = 0$ 은 이차방정식이어야 하므로 $k - 2 \neq 0$

$\therefore k \neq 2 \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{3(k - 1)\}^2 - (k - 2)(9k + 1) > 0$$

$$9(k^2 - 2k + 1) - (9k^2 - 17k - 2) > 0$$

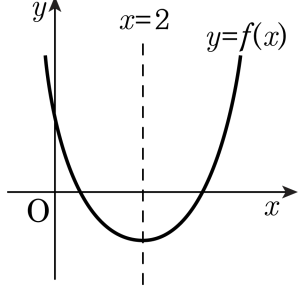
$$-k + 11 > 0$$

$\therefore k < 11 \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$

①, ②에서 $k < 11$, $k \neq 2$

따라서, 정수 k 의 최댓값은 10이다.

9. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x 에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

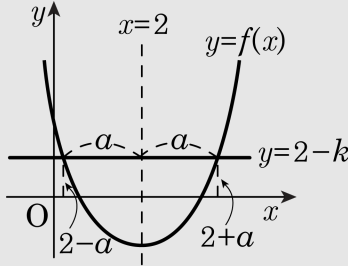
해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면
 $f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은

$$t = 2 - k \text{ 또는 } t = 2 + k$$

($0 < k < 2$)로 놓을 수 있다.

$$\therefore f(x) = 2 - k \text{ 또는 } f(x) = 2 + k$$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은
 $y = f(x)$ 의 그래프와

직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x 좌표이므로

$$x = 2 - a \text{ 또는 } x = 2 + a$$

(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도

마찬가지로 생각하면 $x = 2 - b$ 또는 $x = 2 + b$

따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은

$$(2 - a) + (2 + a) + (2 - b) + (2 + b) = 8$$

10. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$ 이 직선 $y = kx - 6$ 보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$ 을 이용하여 $\alpha + \beta$ 를 구하면,
 $(1 + k)^2 - 36 < 0$
 $k^2 + 2k - 35 < 0, (k + 7)(k - 5) < 0 \therefore -7 < k < 5$
 $\therefore \alpha + \beta = -7 + 5 = -2$

11. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$
즉 $x^3 - 2x^2 + (a - 3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는
직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로
 $y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$
 $\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12$
 $\quad \quad \quad = 3 \cdot 2 - 12$
 $\quad \quad \quad = -6$

12. x 에 관한 방정식 $|x^2 - 1| - x - k = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $1 < k < \frac{5}{4}$ ② $1 \leq k \leq \frac{5}{4}$ ③ $-5 < k < -\frac{5}{4}$
 ④ $k < 1, k > \frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5} < k < 1$

해설

$|x^2 - 1| - x - k = 0$ 을 변형하여
 분리하면

$$|x^2 - 1| = x + k, y = |x^2 - 1|, y = x + k$$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.

$$y = -x^2 + 1, y = x + k \text{가}$$

두 점에서 만나야하므로

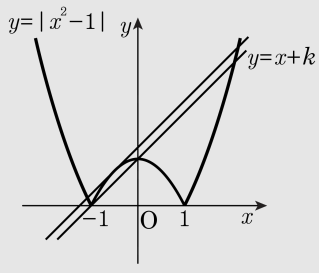
$x^2 + x + k - 1 = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$D = 1 - 4k + 4 > 0 \quad \therefore k < \frac{5}{4}$$

또, 직선 $y = x + k$ 는 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 직선 위에 존재해야하므로

$$0 < -1 + k \quad \therefore k > 1$$

$$\therefore 1 < k < \frac{5}{4}$$



13. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a 는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2 + (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 이
두 실근을 가져야 하므로
 $D = (a-2)^2 - 4(a^2 + a + 2) = -3a^2 - 8a - 4 \geq 0$
 $(3a+2)(a+2) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq -\frac{2}{3} \cdots \text{㉠}$
근과 계수의 관계에서
 $\alpha + \beta = -a + 2, \alpha\beta = a^2 + a + 2$ 이므로
 $(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1$
 $= a^2 + a + 2 + a - 2 + 1$
 $= a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$
따라서, $-2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$ 에서
 $a = -1$ 일 때 최솟값 0,
 $a = -2$ 일 때 최댓값 1을 가지므로
최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

14. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$$y^2 + (2 - x)y + x^2 = 0$$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

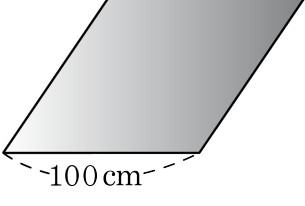
$$D = (2 - x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0,$$

$$3x^2 + 4x - 4 \leq 0, \quad (x + 2)(3x - 2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

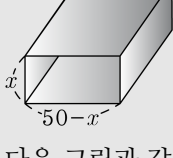
따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

15. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S를 만들고자 한다. S의 단면적의 최댓값은?



- ① 695 cm²
- ② 710 cm²
- ③ 625 cm²
- ④ 525 cm²
- ⑤ 410 cm²

해설



다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록 철판으로 구부리면 단면적 S는

$$S = x(50 - x) = -x^2 + 50x$$

$$= -(x - 25)^2 + 625$$

∴ x = 25일 때, S의 최댓값은 625 cm²