1. 이차함수$y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와
직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은
이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$\therefore\ 3a + b = -5 \cdots$ ㉠

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$\therefore a = -2$

㉠에서 $b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

2. $a^2+b^2=5$인 관계에 있는 두 실수 a, b에 대하여 $f(x)=x^2-4ax+b^2$의 최솟값을 상수 k라 할 때, k의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = x^2 - 4ax + b^2$$
$$= (x-2a)^2 + b^2 - 4a^2$$에서

$k = b^2 - 4a^2 = (5-a^2) - 4a^2 = -5a^2 + 5$

$\therefore$ 따라서 k의 최댓값은 5

3. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 3\}$ 인 이차함수 $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 의 최솟값이 -1 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(1, b)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1,\ b = -2$

② $a = 1,\ b = 2$

③ $a = -1,\ b = 2$

④ $a = 1,\ b = -2$

⑤ $a = -2,\ b = 2$

해설

$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$

$= a(x-2)^2 + 3\ (0 \le x \le 3)$ 이므로

$x = 0$ 일 때 최솟값은 -1 을 갖는다.

$-1 = 4a + 3$

$\therefore a = -1$

점 $(1,\ b)$ 를 지나므로

$\therefore b = a + 3 = 2$

4. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$

$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서

$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

5. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ -9 ⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,

$t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3$.

t 의 범위는 x 에 의해 $1 \le t \le 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때},\ y = -3 \\ t = 5\text{일때},\ y = 6 \end{cases}$$

$\therefore\ M \times m = -18$

6. $x^2+2y^2=4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x+2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2+2y^2=4$에서 $2y^2=4-x^2$
이때, y는 실수이므로 $2y^2=4-x^2\geq 0$
$\therefore -2\leq x\leq 2$
$4x+2y^2=4x+4-x^2=-(x-2)^2+8$
$(-2\leq x\leq 2)$
따라서 $x=-2$일 때, 최솟값 $m=-8$이고,
$x=2$일 때, 최댓값 $M=8$이므로 $M+m=0$

7. x, y가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$의 최댓값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$

이 때, x, y가 실수이므로

$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$

$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$

따라서 $x = -2,\ y = 3$일 때

주어진 식의 최댓값은 1이다.

8. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2 \neq 0$

$\therefore k \neq 2 \cdots\cdots$ ㉠

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=\{3(k-1)\}^2-(k-2)(9k+1)>0$$

$$9\left(k^2-2k+1\right)-\left(9k^2-17k-2\right)>0$$

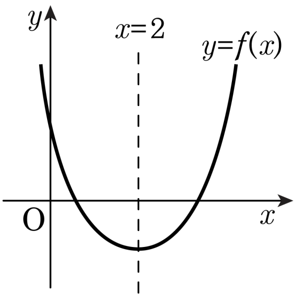
$$-k+11>0$$

$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<11,\ k \neq 2$

따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

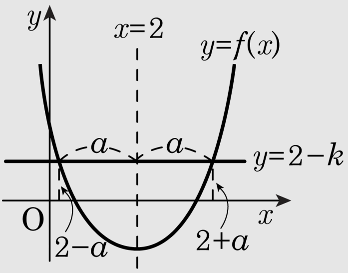
9. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f\circ f)(x)=0$의 모든 실근의 합은? (단, $y=f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$f(f(x))=0$에서 $f(x)=t$로 놓으면
$f(t)=0$을 만족시키는 두 실근은
$t=2-k$ 또는 $f=2+k$
$(0<k<2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x)=2-k$ 또는 $f(x)=2+k$



(i) $f(x)=2-k$를 만족시키는 x의 값은
$y=f(x)$ 의 그래프와
직선 $y=2-k$의 교점의 x좌표이므로
$x=2-\alpha$ 또는 $x=2+\alpha$
(ii) $f(x)=2+k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x=2-\beta$ 또는 $x=2+\beta$
따라서 $f(f(x))=0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2-\alpha)+(2+\alpha)+(2-\beta)+(2+\beta)=8$

10. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$이 직선 $y = kx - 6$보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$을 이용하여 $\alpha + \beta$를 구하면,

$(1 + k)^2 - 36 < 0$

$k^2 + 2k - 35 < 0$, $(k + 7)(k - 5) < 0 \therefore\ -7 < k < 5$

$\therefore\ \alpha + \beta = -7 + 5 = -2$

11. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6　② -5　③ -4　④ -3　⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$

즉 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는

직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로

$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$

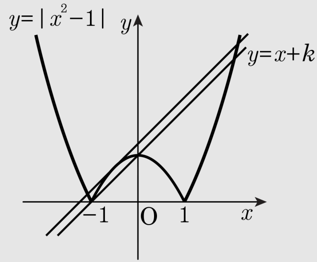
$$\begin{aligned}\therefore y_1 + y_2 + y_3 &= 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12 \\ &= 3 \cdot 2 - 12 \\ &= -6\end{aligned}$$

12. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\dfrac{5}{4}$　　② $1\le k\le\dfrac{5}{4}$　　③ $-5<k<-\dfrac{5}{4}$
④ $k<1,\ k>\dfrac{5}{4}$　　⑤ $\dfrac{4}{5}<k<1$

해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여
분리하면
$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$
이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면
다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가
두 점에서 만나야하므로
$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0$　　$\therefore\ k<\dfrac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k$　　$\therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\dfrac{5}{4}$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차방정식 $x^2+(a-2)x+a^2+a+2=0$이
두 실근을 가져야 하므로
$D=(a-2)^2-4(a^2+a+2)=-3a^2-8a-4 \geq 0$
$(3a+2)(a+2) \leq 0$
$\therefore -2 \leq a \leq -\frac{2}{3} \cdots$ ㉠
근과 계수의 관계에서
$\alpha+\beta=-a+2,\ \alpha\beta=a^2+a+2$이므로
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=a^2+a+2+a-2+1$
$=a^2+2a+1=(a+1)^2$
따라서, $-2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$에서
$a=-1$일 때 최솟값 0,
$a=-2$일 때 최댓값 1을 가지므로
최댓값과 최솟값의 합은 1이다.

14. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ 2 ④ $\frac{11}{5}$ ⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2+(2-x)y+x^2=0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

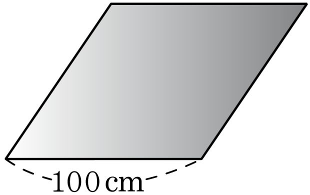
$D=(2-x)^2-4\cdot x^2\geq 0$,

$3x^2+4x-4\leq 0$, $(x+2)(3x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq \frac{2}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

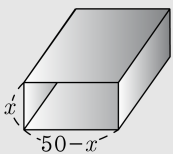
15. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S를 만들고자 한다. S 의 단면적의 최댓값은?



① $695\,\mathrm{cm}^2$ ② $710\,\mathrm{cm}^2$ ③ $625\,\mathrm{cm}^2$

④ $525\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $410\,\mathrm{cm}^2$

해설



다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록 철판으르 구부리면 단면적 S 는

$$S = x(50-x) = -x^2 + 50x$$
$$= -(x-25)^2 + 625$$

$\therefore\ x = 25$ 일 때, S 의 최댓값은 $625\,\mathrm{cm}^2$