1. 두 다항식 $3x^4-2x^3-9x^2+4$, $3x^3-3x^2-6x$의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$ ② $(x+1)(x+2)$ ③ $(x+1)(x-2)$
④ $(x-1)(x-2)$ ⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$3x^4-2x^3-9x^2+4$
$=(x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$
$3x^3-3x^2-6x=3x(x-2)(x+1)$
$\therefore$ 최대공약수 : $(x-2)(x+1)$

2. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

3. 실수 x, y가 $xy = 6$, $x^2y + xy^2 + x + y = 63$을 만족시킬 때, $x^2 + y^2$의 값은?

① 13 ② $\frac{1173}{32}$ ③ 55 ④ 69 ⑤ 81

해설

$x^2y + xy^2 + x + y$
$= xy(x+y) + (x+y)$
$= (xy+1)(x+y)$
$= 7(x+y) = 63$,
$x + y = 9$, $xy = 6$
$\therefore\ x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$
$= 81 - 12 = 69$

4. $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2^{24}　　④ 2^{25}　　⑤ 2^{50}

해설

$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$

$x = 1$을 양변에 대입하면

$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots$ ①

$x = -1$을 양변에 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots$ ②

① + ②: $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$

$a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{50} = 0$

5. 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0,\ g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$ ② $x-1$ ③ $-x+1$
④ $-x-1$ ⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면
$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$
$g(\sqrt{2}+1)=f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b$
$=a(\sqrt{2}+1)+b\ (\because\ f(\sqrt{2}+1)=0)$
$\therefore\ a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$
$\therefore\ a=1,\ b=1$
따라서 구하는 나머지는 $x+1$

6. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$
$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$
$=(x-y)(x+y+1)^2$
$p=-1, q=1, r=1$
$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$

7. $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=4$일 때, $x^4+y^4+z^4$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$
$0 = 4+2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ xy+yz+zx=-2$

$(xy+yz+zx)^2$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz)$
$= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$
$4 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+0$
$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=4$

$(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$
$16 = x^4+y^4+z^4+2\cdot 4$
$\therefore\ x^4+y^4+z^4=8$

8. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0 ② α ③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$ ⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)+R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x)+R_2\}+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2Q_2(x)+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x)+R_3\}+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&= (x-\alpha)^3Q_3(x)+(x-\alpha)^2R_3+(x-\alpha)R_2+R_1 \\
&\quad\vdots \\
&= (x-\alpha)^nQ_n(x)+(x-\alpha)^{n-1}R_n+ \\
&\qquad\cdots\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1
\end{aligned}
$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를
$R(x)$라 하면
$R(x)=(x-\alpha)^{n-1}R_n+\cdots+(x-\alpha)R_2+R_1$
$\therefore\ R(\alpha)=R_1=f(\alpha)$

9. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$
그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$
또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로
$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$
따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$
∴구하는 나머지의 상수항은 2

10. 다음은 다항식 $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$ 이 x^2+x+1 로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수 n을 구하는 과정이다. (　　　) 에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

> ω가 다항식 $x^2+x+1=0$을 만족하는 근이라고 하면 $\omega^2+\omega+1=0$
> $\therefore\ \omega^3,\ \omega \neq 1$
> (i) $n=3k(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> 　　$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=$ (㉠) $\neq 0$
> (ii) $n=3k+1(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> 　　$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=$ (㉡)
> (iii) $n=3k+2(k=0,1,2,\cdots)$ 이면
> 　　$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$
> 따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n은 (㉢) 이다.

① $1, 0, 3k$　　② $2, 1, 3k+1$　　③ $3, 0, 3k+2$
④ $3, 0, 3k$　　⑤ $2, 1, 3k$

해설

(i) $n=3k$ 이면
$$\begin{aligned}&\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}\\&=\omega^{6k}+1+(\omega+1)^{6k}\\&=\omega^{6k}+1+(-\omega^2)^{6k}\\&=(\omega^3)^{2k}+1+(\omega^3)^{4k}\\&=1+1+1(\because\ \omega^3=1)=(\ 3\ )\neq 0\end{aligned}$$
(ii) $n=3k+1$ 이면
$$\begin{aligned}&\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}\\&=\omega^{6k}+2+1+(\omega+1)^{6k}+2\\&=\omega^{6k}\cdot\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}+2\\&=\omega^2+1+(-\omega^2)^{6k}(-\omega^2)^2\\&=\omega^2+1+\omega=(\ 0\ )\end{aligned}$$
(iii) $n=3k+2$ 이면
$$\omega^{2n}+1+(\omega+1)^{2n}=0$$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n은 $(3k)$ 이다.