

1. 두 다항식 $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$, $3x^3 - 3x^2 - 6x$ 의 최대공약수를 구하면?

① $(x-1)(x-2)$

② $(x+1)(x+2)$

③ $(x+1)(x-2)$

④ $(x-1)(x-2)$

⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$$3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$$

$$= (x+1)(x-2)(x+1)(3x-2)$$

$$3x^3 - 3x^2 - 6x = 3x(x-2)(x+1)$$

$$\therefore \text{최대공약수} : (x-2)(x+1)$$

2. 두 다항식 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$, $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -21

② -15

③ -5

④ -1

⑤ 0

해설

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.

따라서 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore a = b \quad \therefore a - b = 0$

3. 실수 x, y 가 $xy = 6$, $x^2y + xy^2 + x + y = 63$ 을 만족시킬 때, $x^2 + y^2$ 의 값은?

- ① 13 ② $\frac{1173}{32}$ ③ 55 ④ 69 ⑤ 81

해설

$$\begin{aligned} & x^2y + xy^2 + x + y \\ &= xy(x + y) + (x + y) \\ &= (xy + 1)(x + y) \\ &= 7(x + y) = 63, \\ & x + y = 9, xy = 6 \\ & \therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \\ & \quad = 81 - 12 = 69 \end{aligned}$$

4. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2^{24}

④ 2^{25}

⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

5. 함수 $f(x) = x^2 + px + q$ 와 $g(x)$ 는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1) = 0$, $g(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 나머지는?



① $x + 1$

② $x - 1$

③ $-x + 1$

④ $-x - 1$

⑤ $2x + 1$

해설

$g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$g(x) = f(x)Q(x) + ax + b$$

$$\begin{aligned} g(\sqrt{2}+1) &= f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1) + a(\sqrt{2}+1) + b \\ &= a(\sqrt{2}+1) + b \quad (\because f(\sqrt{2}+1) = 0) \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + a\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

따라서 구하는 나머지는 $x + 1$

6. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\} \\ &= (x-y)(x+y+1)^2 \\ & p = -1, q = 1, r = 1 \\ & \therefore p^2 + q^2 + r^2 = 3 \end{aligned}$$

7. $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 일 때, $x^4 + y^4 + z^4$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$0 = 4 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore xy + yz + zx = -2$$

$$(xy + yz + zx)^2$$

$$= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2(xy^2z + xyz^2 + x^2yz)$$

$$= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z)$$

$$4 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 0$$

$$\therefore x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 4$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

$$16 = x^4 + y^4 + z^4 + 2 \cdot 4$$

$$\therefore x^4 + y^4 + z^4 = 8$$

8. 다항식 $f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_2(x)$ 라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$ 라 한다. $f(x)$ 를 $(x - \alpha)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(\alpha)$ 의 값은?

① 0

② α

③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$

⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,

나머지를 R_1 이라 하면

$$f(x) = (x - \alpha)Q_1(x) + R_1 \text{에서}$$

$Q_n(x)$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지를 R_{n+1} 이라 하면

$$f(x) = (x - \alpha)\{(x - \alpha)Q_2(x) + R_2\} + R_1$$

$$= (x - \alpha)^2 Q_2(x) + (x - \alpha)R_2 + R_1$$

$$= (x - \alpha)^2 \{(x - \alpha)Q_3(x) + R_3\} + (x - \alpha)R_2 + R_1$$

$$= (x - \alpha)^3 Q_3(x) + (x - \alpha)^2 R_3 + (x - \alpha)R_2 + R_1$$

$\vdots$

$$= (x - \alpha)^n Q_n(x) + (x - \alpha)^{n-1} R_n +$$

$$\cdots \cdots + (x - \alpha)R_2 + R_1$$

따라서 $f(x)$ 를 $(x - \alpha)^n$ 으로 나눈 나머지를

$R(x)$ 라 하면

$$R(x) = (x - \alpha)^{n-1} R_n + \cdots + (x - \alpha)R_2 + R_1$$

$$\therefore R(\alpha) = R_1 = f(\alpha)$$

9. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라고 하면,

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

그런데 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + (x + 1)$$

또 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이므로

$$f(1) = 2a + 2 = 4 \text{에서 } a = 1$$

$$\text{따라서 } ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1 = x^2 + x + 2$$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

10. 다음은 다항식 $x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$ 이 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지지 않게 하는 자연수 n 을 구하는 과정이다. () 에 알맞은 수를 차례대로 나열한 것은?

ω 가 다항식 $x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 근이라고 하면 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$\therefore \omega^3, \omega \neq 1$$

(i) $n = 3k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = (\ominus) \neq 0$$

(ii) $n = 3k + 1 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = (\oslash)$$

(iii) $n = 3k + 2 (k = 0, 1, 2, \dots)$ 이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = 0$$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n 은 ($\ominus$) 이다.

① 1, 0, $3k$

② 2, 1, $3k + 1$

③ 3, 0, $3k + 2$

④ 3, 0, $3k$

⑤ 2, 1, $3k$

해설

(i) $n = 3k$ 이면

$$\begin{aligned} & \omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} \\ &= \omega^{6k} + 1 + (\omega + 1)^{6k} \\ &= \omega^{6k} + 1 + (-\omega^2)^{6k} \\ &= (\omega^3)^{2k} + 1 + (\omega^3)^{4k} \\ &= 1 + 1 + 1 (\because \omega^3 = 1) = (3) \neq 0 \end{aligned}$$

(ii) $n = 3k + 1$ 이면

$$\begin{aligned} & \omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} \\ &= \omega^{6k} + 2 + 1 + (\omega + 1)^{6k} + 2 \\ &= \omega^{6k} \cdot \omega^2 + 1 + (-\omega^2)^{6k} + 2 \\ &= \omega^2 + 1 + (-\omega^2)^{6k} (-\omega^2)^2 \\ &= \omega^2 + 1 + \omega = (0) \end{aligned}$$

(iii) $n = 3k + 2$ 이면

$$\omega^{2n} + 1 + (\omega + 1)^{2n} = 0$$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서 구하는 n 은 $(3k)$ 이다.