

1. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1

② -1

③ $\sqrt{-1}$

④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\therefore j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$$

2. $(3 + 4i)^5(15 - 20i)^5$ 을 간단히 하면?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5^7

② 5^{10}

③ 5^{12}

④ 5^{15}

⑤ 5^{20}

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5^5(3 + 4i)^5(3 - 4i)^5 \\&= 5^5\{(3 + 4i)(3 - 4i)\}^5 \\&= 5^5(5^2)^5 \\&= 5^{15}\end{aligned}$$

3. $a < 0, b < 0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 않는 것은?

① $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b} = -a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

④ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = ab$

해설

$a = -\alpha, b = -\beta (\alpha > 0, \beta > 0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b} = \sqrt{\alpha^2(-\beta)} = \alpha\sqrt{-\beta} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b} = \sqrt{(\alpha)^3(-\beta)}$
 $= \alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}$
 $= -a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}$
 $= \sqrt{\alpha}i \cdot \sqrt{\beta}i$
 $= \sqrt{\alpha\beta}i^2$
 $= -\sqrt{\alpha\beta}$
 $= -\sqrt{ab}$

④ $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}}$
 $= \frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i}$
 $= \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$
 $= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$
 $= \sqrt{\frac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2} = \alpha\beta = ab$

4. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

② $x^4 + x^2 - 2 = 0$

③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

④ $x^4 - 16 = 0$

⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다

① $(x - 2)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow$ 실근 1개, 허근 2개

② $(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

③ $(x - 3)(x + 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow$ 실근 3개

④ $(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

⑤ $x = \frac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2개

5. 삼차방정식 $2x^3 + px^2 + qx - 5 = 0$ 의 한 근이 $1 - 2i$ 일 때 $p + q$ 의 값은?(단, p, q 는 실수)

- ① 7 ② -7 ③ 6 ④ -6 ⑤ 11

해설

한 근이 $1 - 2i$ 이므로 다른 두 근을 $1 + 2i, \alpha$ 라 하면 세 근의 곱 :

$$(1 - 2i)(1 + 2i)\alpha = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{세 근의 합: } -\frac{p}{2} = (1 - 2i) + (1 + 2i) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore p = -5$$

$$\text{두근끼리 곱의 합: } \frac{q}{2} = (1 - 2i)(1 + 2i) + (1 - 2i + 1 + 2i) \cdot \frac{1}{2} = 6$$

$$\therefore q = 12$$

$$\therefore p + q = 7$$

해설

한 근이 $1 - 2i$ 이므로 다른 한 근은 $1 + 2i$

근과 계수의 관계에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$

나머지 일차식을 $2x + a$ 라고 하면

$$2x^3 + px^2 + qx - 5 = (2x + a)(x^2 - 2x + 5) \text{ 에서}$$

$a = -1$ 이므로 대입하여 정리하면

$$p = -5, q = 12$$

$$\therefore p + q = 7$$

6. m 은 양의 정수이고, x 에 관한 이차방정식 $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + m\sqrt{2} - 4 = 0$ 의 한 근은 정수이다. 이 때, m 의 값을 구하여라.

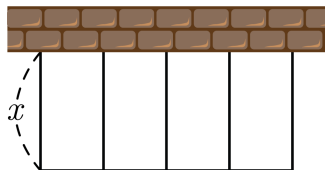
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α 라 하자
 $\alpha^2 - (3 + \sqrt{2})\alpha + m\sqrt{2} - 4 = 0$
 $(m - \alpha)\sqrt{2} + \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$
 $m = \alpha$ 그리고 $\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$
 $(\alpha + 1)(\alpha - 4) = 0$
 $\alpha = -1$ 또는 $\alpha = 4$
 m 이 양의 정수이므로 $\alpha = 4$ 에서 $m = 4$

7. 60m 의 철망으로 다음 그림과 같이 담장을 이용하여 똑같은 크기의 직사각형 모양의 담장을 4 개 만들려고 한다. 4 개의 담장의 넓이의 합의 최댓값은?



- ① 140m² ② 160m² ③ 180m²
 ④ 200m² ⑤ 240m²

해설

담장 한 개의 가로 길이는 $\frac{60-5x}{4}$
 담장의 넓이의 합은 $x\left(\frac{60-5x}{4}\right) \times 4 = x(60-5x)$ 이다.
 $\therefore -5x^2 + 60x = -5(x^2 - 12x + 36) + 180$
 $\qquad\qquad\qquad = -5(x-6)^2 + 180$

8. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

9. x 의 이차방정식 $x^2 + (k-2)x + 2 + k^2 + k = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하고 $(1-\alpha)(1-\beta)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2 - k, \quad \alpha\beta = 2 + k^2 + k \\ \therefore (1 - \alpha)(1 - \beta) &= 1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta \\ &= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ \text{실근 조건에 의해} \\ D &= (k - 2)^2 - 4(2 + k + k^2) \geq 0 \\ 3k^2 + 8k + 4 &\leq 0 \quad \therefore (3k + 2)(k + 2) \leq 0 \\ \therefore -2 \leq k &\leq -\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서} \\ k = -1 \text{ 일 때 } m &= 0 \\ k = -2 \text{ 일 때 } M &= 1 \\ \therefore M + m &= 1 \end{aligned}$$

10. 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$
 - ② $\alpha^4 = 1$
 - ③ $\alpha^{100} + \alpha^{50} + \alpha^{25} + \alpha^{15} + 1 = 1$
 - ④ α 는 실수가 아니다.
 - ⑤ α^3 은 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이다.

해설

① α 가 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이므로,
 $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

② $\alpha^4 - 1$
 $= (\alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$ 이므로
 $\alpha^4 = 1$

③ $\alpha^{100} + \alpha^{50} + \alpha^{25} + \alpha^{15} + 1$
 $= (\alpha^4)^{25} + (\alpha^4)^{12} \cdot \alpha^2 + (\alpha^4)^6 \cdot \alpha + (\alpha^4)^3 \cdot \alpha^3 + 1$
 $= 1 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^3 + 1 = 1$

④ $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1) = 0$ 에서
 $x = -1$ 이라는 실근이 존재하므로
 α 는 실수일 수 있다.

⑤ $x = \alpha^3$ 을 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 에 대입하면,
 $\alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1$
 $= (\alpha^4)^2 \cdot \alpha + \alpha^4 \cdot \alpha^2 + \alpha^3 + 1$
 $= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + 1 = 0$
($\because \alpha^4 = 1$)