1. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1

② -1

③ $\sqrt{-1}$

④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

2. $(3+4i)^5(15-20i)^5$ 을 간단히 하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5^7 ② 5^{10} ③ 5^{12} ④ 5^{15} ⑤ 5^{20}

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5^5(3+4i)^5(3-4i)^5 \\ &= 5^5\{(3+4i)(3-4i)\}^5 \\ &= 5^5(5^2)^5 \\ &= 5^{15}\end{aligned}$$

3. $a<0,\ b<0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 않는 것은?

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

④ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

해설

$a=-\alpha,\ b=-\beta(\alpha>0,\ \beta>0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{\alpha^2(-\beta)}=\alpha\sqrt{-\beta}=-a\sqrt{b}$

② $$\begin{aligned}\sqrt{a^3b}&=\sqrt{(\alpha)^3(-\beta)}\\&=\alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}\\&=-a\sqrt{ab}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}&=\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}\\&=\sqrt{\alpha}i\cdot\sqrt{\beta}i\\&=\sqrt{\alpha\beta}i^2\\&=-\sqrt{\alpha\beta}\\&=-\sqrt{ab}\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}&=\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}}\\&=\frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i}\\&=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2}=\alpha\beta=ab$

4. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$　② $x^4 + x^2 - 2 = 0$

③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$　④ $x^4 - 16 = 0$

⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다

① $(x-2)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow$ 실근 1개, 허근 2개

② $(x^2-1)(x^2+2)=0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

③ $(x-3)(x+4)(x-2)=0 \Rightarrow$ 실근 3개

④ $(x^2+4)(x^2-4)=0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

⑤ $x = \dfrac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2개

5. 삼차방정식 $2x^3+px^2+qx-5=0$ 의 한 근이 $1-2i$ 일 때 $p+q$ 의 값은?(단, p, q 는 실수)

① 7 ② -7 ③ 6 ④ -6 ⑤ 11

해설

한 근이 $1-2i$ 이므로 다른 두 근을 $1+2i, \alpha$ 라 하면 세 근의 곱 :

$(1-2i)(1+2i)\alpha = \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ \alpha = \dfrac{1}{2}$

세 근의 합 : $-\dfrac{p}{2} = (1-2i)+(1+2i)+\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

$\therefore\ p=-5$

두근끼리 곱의 합 : $\dfrac{q}{2} = (1-2i)(1+2i)+(1-2i+1+2i)\cdot\dfrac{1}{2} = 6$

$\therefore\ q=12$

$\therefore\ p+q=7$

해설

한 근이 $1-2i$ 이므로 다른 한 근은 $1+2i$

근과 계수의 관계에서 $x^2-2x+5=0$

나머지 일차식을 $2x+a$ 라고 하면

$2x^3+px^2+qx-5=(2x+a)(x^2-2x+5)$ 에서

$a=-1$ 이므로 대입하여 정리하면

$p=-5,\ q=12$

$\therefore\ p+q=7$

6. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

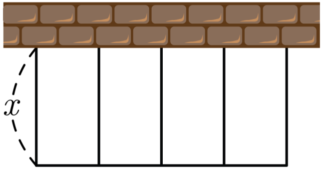
$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

7. 60m 의 철망으로 다음 그림과 같이 담장을 이용하여 똑같은 크기의 직사각형 모양의 닭장을 4 개 만들려고 한다. 4 개의 닭장의 넓이의 합의 최댓값은?



① 140m^2 ② 160m^2 ③ 180m^2

④ 200m^2 ⑤ 240m^2

해설

닭장 한 개의 가로의 길이는 $\dfrac{60-5x}{4}$

닭장의 넓이의 합은 $x\left(\dfrac{60-5x}{4}\right)\times 4 = x(60-5x)$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore -5x^2+60x &= -5(x^2-12x+36)+180 \\ &= -5(x-6)^2+180\end{aligned}$$

8. 이차방정식 $x^2+mx-m+1=0$이 양의 정수근 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-m & \cdots ① \\ \alpha\beta=-m+1 & \cdots ② \end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=1$, $(\alpha-1)(\beta-1)=2$

α,β 가 양의 정수이므로

$\alpha-1=1,\beta-1=2$ 또는 $\alpha-1=2,\beta-1=1$

$\therefore\ (\alpha,\beta)=(2,3),(3,2)$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=13$

$\alpha+\beta=-m$ 이므로 $m=-5$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+m=13+(-5)=8$

9. x의 이차방정식 $x^2+(k-2)x+2+k^2+k=0$의 두 실근을 α, β라 하고 $(1-\alpha)(1-\beta)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$\alpha+\beta=2-k,\ \alpha\beta=2+k^2+k$

$\therefore\ (1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉠

실근 조건에 의해

$D=(k-2)^2-4(2+k+k^2)\geq 0$

$3k^2+8k+4\leq 0 \therefore\ (3k+2)(k+2)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq k\leq -\dfrac{2}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$k=-1$일 때 $m=0$

$k=-2$일 때 $M=1$

$\therefore M+m=1$

10. 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

② $\alpha^4=1$

③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1=1$

④ α는 실수가 아니다.

⑤ α^3은 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이다.

해설

① α가 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이므로,
$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$
② α^4-1
$=(\alpha-1)(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$이므로
$\alpha^4=1$
③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1$
$=(\alpha^4)^{25}+(\alpha^4)^{12}\cdot\alpha^2+(\alpha^4)^6\cdot\alpha+(\alpha^4)^3\cdot\alpha^3+1$
$=1+\alpha^2+\alpha+\alpha^3+1=1$
④ $x^3+x^2+x+1=(x^2+1)(x+1)=0$에서
$x=-1$이라는 실근이 존재하므로
α는 실수일 수 있다.
⑤ $x=\alpha^3$을 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$에 대입하면,
$\alpha^9+\alpha^6+\alpha^3+1$
$=(\alpha^4)^2\cdot\alpha+\alpha^4\cdot\alpha^2+\alpha^3+1$
$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+1=0$
$(\because\ \alpha^4=1)$