

1. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2 \text{ 이므로}$$

$$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$$P(x) = 2x - a$$

$$\begin{aligned} \therefore (x + a)P(x) &= (x + a)(2x - a) \\ &= 2x^2 + ax - a^2 \end{aligned}$$

2. $(1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + 6x^5 + 7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0

② 2

③ -2

④ 4

⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은

(3차항)×(상수항), (2차항) ×(1차항)

2쌍씩이다.

$$4 \times 1 \times 2 + (-3) \times 2 \times 2 = 8 + (-12) = -4$$

3. 3차 이하의 다항식 $f(x)$ 에 대하여

$\frac{f(x)}{x(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{x-3}$ 가 성립할 때, 다음 중 d 와 같은 것은? (단, a, b, c, d 는 실수이다.)

- ① $f(0)$ ② $f(1)$ ③ $\frac{f(2)}{2}$ ④ $\frac{f(3)}{6}$ ⑤ 0

해설

준 식을 정리하면

$$f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + bx(x-2)(x-3) + cx(x-1)(x-3) + dx(x-1)(x-2)$$

$x = 3$ 일 때,

$$f(3) = d \cdot 3(3-1)(3-2)$$

$$\therefore d = \frac{f(3)}{6}$$

4. x 에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면,

$$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면,

$$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}: -2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = -1$$

5. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\&= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4$$

6. 두 다항식 $x^2 - 3x + a$ 와 $x^2 + bx - 6$ 의 최대공약수가 $x - 1$ 일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$ 라 하자. 이 때, $f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 3x + a, x^2 + bx - 6 \text{은} \\ & (x - 1) \text{을 인수로 가지므로 } a = 2, b = 5 \\ & \therefore x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) \\ & x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1) \\ & f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 6) \\ & f(x) \text{를 } x - 2 \text{로 나눈 나머지 } f(2) = 0 \end{aligned}$$

7. $\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} = k \times 10^n$ (단, $0 < k < 10$, n 은 자연수)로 나타낼 때, n 의 값을 구하면?

① 72

② 71

③ 70

④ 69

⑤ 68

해설

$$\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} = N \text{이라고 하면}$$

$$\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^{15}} < N < \frac{10^{85}}{10^{15}}$$

$$\frac{10 \times 10^{84}}{2 \times 10^{15}} < N < \frac{10 \times 10^{84}}{10^{15}}$$

$$5 \times 10^{69} < N < 10 \times 10^{69}$$

$$\text{따라서 } N = k \times 10^{69} (5 < k < 10)$$

$$\therefore n = 69$$

8. n 이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a - 2b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$x^{2n}(x^2 + ax + b) = (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2) \cdots \textcircled{1}$$

$x = -2$ 를 대입하면,

$$4^n(4 - 2a + b) = 0 \quad \therefore b = 2a - 4 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\text{한편, } x^2 + ax + 2a - 4 = x^2 - 4 + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2) + a(x + 2)$$

$$= (x + 2)(x - 2 + a)$$

$$\therefore x^{2n}(x + 2)(x - 2 + a)$$

$$= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)$$

$$\therefore x^{2n}(x - 2 + a) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n \quad \therefore -4 + a = 1 \quad \therefore a = 5$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } b = 6 \quad \therefore a - 2b = -7$$

9. n 이 양의 정수일 때, $8^{100n} - 1$ 을 9로 나눈 나머지는?

① 0

② 1

③ 2

④ 4

⑤ 6

해설

$8 = x$ 라 하면 $8^{100n} - 1 = x^{100n} - 1$ 이고 $9 = x + 1$ 이 된다.

$x^{100n} - 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{100n} - 1 = (x + 1)Q(x) + R$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $R = 0$

$$\therefore x^{100n} - 1 = (x + 1)Q(x)$$

위의 식에 $x = 8$ 을 대입하면 $8^{100n} - 1 = 9Q(x)$ 이므로 $8^{100n} - 1$ 을 9로 나눈 나머지는 0이다.

10. $\frac{bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2)}{bx + ay} + \frac{ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2)}{bx + ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2 + b^2y^2$

② $(ax + by)^2$

③ $(bx + ay)^2$

④ $2(a^2x^2 + b^2y^2)$

⑤ $(ax + by)(bx + ay)$

해설

$$\begin{aligned}
 (\text{분자}) &= bx(a^2x^2 + 2a^2y^2 + b^2y^2) + ay(a^2x^2 + 2b^2x^2 + b^2y^2) \\
 &= bx(a^2x^2 + b^2y^2) + 2a^2bxy^2 + ay(a^2x^2 + b^2y^2) + 2ab^2x^2y \\
 &= (a^2x^2 + b^2y^2)(bx + ay) + 2abxy(ay + bx) \\
 &= (bx + ay)(a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\
 &= (bx + ay)(ax + by)^2 \\
 \text{따라서, (준 식)} &= (ax + by)^2
 \end{aligned}$$