1. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면
$(x+2)^2 = (-i)^2$ 이므로
$x^2 + 4x = -5$
$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

2. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ n이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.

Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$

Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.

Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ　　② Ⅰ, Ⅲ　　③ Ⅱ, Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅳ　　⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $$\begin{aligned}\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} &= |a+1| - |a-2| \\ &= a+1-(2-a) \\ &= 2a-1 \neq 3\end{aligned}$$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0,\ a \geq 0$ 이다.

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} &= \sqrt{a}\cdot\sqrt{-(-b)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{(-b)}i \\ &= \sqrt{a(-b)}i = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}\end{aligned}$$

$\therefore\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

3. 다음 연립방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5},\ y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5},\ y = \sqrt{5}$

③ $x = \dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ y = -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$x^2 + xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x - y)(x + 2y) = 0$

ⅰ) $x = y$ $x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$

$y = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ x = \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

ⅱ) $x = -2y$

$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$

$y^2 = 5$ $y = \pm\sqrt{5},\ x = \mp 2\sqrt{5}$

$\therefore$ 해: $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

$(-2\sqrt{5},\ \sqrt{5}),\ (2\sqrt{5},\ -\sqrt{5})$

4. 모든 실수 x에 대하여 $P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$, $P(0)=0$을 만족한다. 2차 이하의 다항식 $P(x)$의 계수의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2
④ 3　　⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$P(0)=0$에서 $c=0$ $\therefore$ $P(x)=ax^2+bx$
$P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$이므로
$a(x^2+1)^2+b(x^2+1)=(ax^2+bx)^2+1$
$ax^4+2ax^2+a+bx^2+b=a^2x^4+2abx^3+b^2x^2+1$
양변의 계수를 비교하면
$a=a^2,\ 2ab=0,\ 2a+b=b^2,\ a+b=1$
$a^2=a$와 $a+b=1$에서
$(a,\ b)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$이 되는데
이 중 $(1,\ 0)$은 $2a+b=b^2$을 만족하지 않으므로 $(a,\ b)=(0,\ 1)$
즉, $P(x)=x$뿐이다.
$\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$에서 $x=0$을 대입하면
$P(1)=\{P(0)\}^2+1$이 된다.
$P(1)=1$($\therefore$ 모든 계수의 합은 $x=1$ 대입)

5. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $y=x^2-2x+2$ 의 그래프가 직선 $y=mx-2$보다 위쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $-6<m<2$　② $-4<m<1$　③ $-2<m<0$

④ $2<m<5$　⑤ $4<m<6$

해설

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2-2x+2>mx-2$ 가 성립하므로
$x^2-(m+2)x+4>0$ 에서
이차방정식 $x^2-(m+2)x+4=0$ 의 판별식을 D라 하면
$D=(m+2)^2-16<0$
$(m+6)(m-2)<0$
$\therefore -6<m<2$

6. 임의의 실수 x에 대하여 $x^{11}+x=a_0+a_1(x+3)+a_2(x+3)^2+\cdots+a_{11}(x+3)^{11}$이 성립할 때, $a_1+a_3+\cdots+a_{11}$의 값은?

① $2^{22}-2^{11}+2$　② $2^{22}+2^{11}-2$　③ $2^{21}-2^{10}+1$
④ $2^{21}+2^{10}-1$　⑤ $2^{21}+2^{10}+1$

해설

주어진 식의 양변에 $x=-2,\ x=-4$를 각각 대입하면
$-2^{11}-2=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}\cdots$㉠
$-2^{22}-4=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_{11}\cdots$㉡
㉠ − ㉡에서 $2(a_1+a_3+\cdots+a_{11})=2^{22}-2^{11}+2$
$\therefore\ a_1+a_3+\cdots+a_{11}=2^{21}-2^{10}+1$

7. $a+b+c=0,\ abc \neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0(\because\ a+b+c=0\ )$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore(\text{준식})=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{bc+ca+ab}{abc}\right)$

$=\dfrac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$

8. $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α,β라 하고, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$라 할 때, $g(\alpha)\cdot g(\beta)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 8 ④ 11 ⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=1$

또, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$

$=(x^2-3x+1)(x+2)+2x+1$

$\alpha,\ \beta$는 $x^2-3x+1=0$의 근이므로

$g(\alpha)=2\alpha+1,\ g(\beta)=2\beta+1$

$\therefore\ g(\alpha)g(\beta)=(2\alpha+1)(2\beta+1)$

$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$

$=4+6+1=11$

9. 실수 x, y, z가 $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=14$, $x^3+y^3+z^3=20$을 만족할 때, $x-2y+z$의 값을 구하면? (단, $x<y<z$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x+y+z=2 \ldots$ ㉠
$x^2+y^2+z^2=14 \ldots$ ㉡
$x^3+y^3+z^3=20 \ldots$ ㉢
㉠, ㉡에서
$xy+yz+zx=-5 \ldots$ ㉣
$x^3+y^3+z^3$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$
$=20$
$\therefore xyz=-6 \ldots$ ㉤
㉠, ㉣, ㉤을 이용하여 $x,\ y,\ z$를
세 근으로 하는 삼차방정식을 만들면
$t^3-2t^2-5t+6=0(t-1)(t+2)(t-3)=0$
$t=1,\ -2,\ 3$
$x<y<z$이므로 $x=-2$ $y=1$ $z=3$
$\therefore\ x-2y+z=-1$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-2xy+4yz-4z^2=1 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ 의 정수해 $x,\ y,\ z$의 곱 xyz를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 36

해설

$(x-y)^2-(y-2z)^2=1$

$\therefore\ (x-2y+2z)(x-2z)=1$

$x,\ y,\ z$가 정수이므로

$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x-2z=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x-2y+2z=-1 \\ x-2z=-1 \end{cases}$

$x=6-y-z$를 대입하면

$\begin{cases} 3y-z=5 \\ y+3z=5 \end{cases} \cdots$(i),

$\begin{cases} 3y-z=7 \\ y+3z=7 \end{cases} \cdots$(ii)

(i) 에서 $x=3,\ y=2,\ z=1$

(ii) 는 만족하는 정수 근이 없다.

$\therefore\ xyz=6$