1. 원 $x^2+y^2=6$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면?

① $y=2x\pm\sqrt{10}$ ② $y=2x\pm3\sqrt{2}$ ③ $y=2x\pm2\sqrt{5}$
④ $y=2x\pm2\sqrt{6}$ ⑤ $y=2x\pm\sqrt{30}$

해설

기울기가 2 인 직선의 방정식은
$y=2x+k$ 직선이 원에 접하므로 직선과 원의 중심 사이 거리는 반지름과 같다.

$\therefore \dfrac{|2\times0+(-1)\times0+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{6}$

$\Rightarrow |k|=\sqrt{30}$

$\Rightarrow k=\pm\sqrt{30}$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{30}$

2. 원 $x^2+y^2-4x-2y=a-3$ 이 x 축과 만나고, y 축과 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a>-2$ ② $a\ge -1$ ③ $-1\le a<2$
④ $-2<a\le 2$ ⑤ $-2\le a<3$

해설

$x^2+y^2-4x-2y=a-3$
$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=a+2$
중심이 $(2,\ 1)$ 이고, 반지름이 $\sqrt{a+2}$ 인 원이다.
x 축과 만나려면 $\sqrt{a+2}\ge 1\cdots$①
y 축과 만나지 않으려면 $0<\sqrt{a+2}<2\cdots$②
①, ②를 동시에 만족하므로
$\therefore\ -1\le a<2$

3. 점 A$(0,\ a)$ 에서 원 $x^2+(y-2)^2=9$ 에 그은 두 접선이 수직이 되도록 하는 a 의 값들의 합을 구하면?

① -1　② $-\sqrt{2}$　③ 2　④ $3\sqrt{2}$　⑤ 4

해설

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은
$y=mx+a$ 이다. 원의 중심 $(0,\ 2)$ 에서 직선 $mx-y+a=0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이와 같으므로 $\dfrac{|m\times 0-2+a|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3$

$\therefore\ |a-2|=3\sqrt{m^2+1}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $9m^2-(a^2-4a-5)=0$ 이 방정식의 두 근을 $m_1,\ m_2$ 라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$m_1m_2=-\dfrac{1}{9}(a^2-4a-5)=-1$, $a^2-4a-14=0$

$\therefore\ a=2\pm3\sqrt{2}$

따라서, 구하는 a 의 값들의 합은
$(2+3\sqrt{2})+(2-3\sqrt{2})=4$

4. 원 $x^2+y^2=5$ 와 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 에서 접하는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, P 는 제1 사분면 위의 점이고, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x_1y_1 > 0$ 이고 넓이는 $\dfrac{25}{2x_1y_1}$ 이므로

x_1y_1 이 최대가 될 때 넓이는 최소가 된다.

그런데 $x_1^2+y_1^2=5$ 이고 $x_1>0, y_1>0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{x_1^2+y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1y_1,\ x_1y_1 \leq \dfrac{5}{2}$

$\therefore \dfrac{1}{x_1y_1} \geq \dfrac{2}{5}$

$\therefore \dfrac{25}{2x_1y_1} \geq \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = 5$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최솟값은 5

5. 점 A(2, 2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$에 그은 두 접선의 기울기를 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은 ?

① $\frac{8}{3}$ ② $-\frac{8}{3}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

점 (2, 2)를 지나고 기울기 m인 접선을
$y - 2 = m(x - 2)$ 즉, $mx - y - 2m + 2 = 0$
이라고 하면
원의 중심 (0, 0)에서 접선까지 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.
따라서 $1 = \frac{|-2m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}}$,
$|-2m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2 - 8m + 3 = 0$
따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.